

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2020 – 2021
MÔN TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề gồm 01 trang)

Thời gian làm bài 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1. (4,0 điểm)

a) Cho $P(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + (x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 1} - 4}{x^3 - 3x^2 + (x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 1} + 4}$, với $x \geq 1, x \neq 2, x \neq \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Hãy tìm các giá trị của x

để biểu thức $P(x)=0$. (Không sử dụng máy tính cầm tay).

b) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ ($x > 0, x \neq 1$). Chứng tỏ rằng

$0 < Q < 2$.

Bài 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x + 5 + 3\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 - x - 2} + 4\sqrt{x+2}$

b) Tìm nghiệm nguyên (x nguyên, y nguyên) của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{(y+1)^2} = 2\sqrt[3]{(2x-1)(y+1)} \\ y^4 - 4 = 18 - 16x^3 + 48x^2 - 48x \end{cases}$$

Bài 3. (3,0 điểm) Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x - (m+1) = 0$ (1). (x là ẩn, m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m=0$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt.

c) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1). Tìm các giá trị của m để biểu thức:

$$K = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1 x_2}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4. (3,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có $\hat{A} = 60^\circ$ nội tiếp đường tròn (O;R). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm hai đường thẳng EF và CB. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M.

a) Tính độ dài cạnh BC theo R.

b) Chứng minh tứ giác AMFE nội tiếp được trong một đường tròn.

c) Kéo dài MH cắt đường tròn (O) tại K. Tính $AB \cdot CK + AC \cdot BK$ theo R.

Bài 5. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC cân ($AB=AC$) nội tiếp đường tròn (O). M là điểm bất kỳ trên dây BC. Vẽ đường tròn (D) qua M và tiếp xúc với AB tại B; vẽ đường tròn E qua M và tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (D) và (E).

a) Chứng minh tứ giác ABNC nội tiếp.

b) Chứng minh $AM \cdot AN = AC^2$

c) Khi điểm M thay đổi trên BC thì trung điểm I của đoạn DE chạy trên đường nào?

Bài 6. (2,0 điểm) Cho biểu thức: $E = x^2 - 3x + y^2 + xy + 2025$. Với giá trị nào của x, y thì E đạt giá trị nhỏ nhất? Tính giá trị nhỏ nhất đó?

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Họ và tên GT1:.....Họ và tên GT2:.....

Bài 1.

a) Với điều kiện của x đã cho, ta phân tích tử và mẫu thành nhân tử được:

$$P(x) = \frac{(x+2) \cdot \sqrt{x-1} \cdot [\sqrt{x-1} \cdot (x+2) + (x-2)\sqrt{x+1}]}{(x-2) \cdot \sqrt{x+1} \cdot [\sqrt{x+1} \cdot (x-2) + (x+2)\sqrt{x-1}]}$$

$$P(x) = \frac{(x+2) \cdot \sqrt{x-1}}{(x-2) \cdot \sqrt{x+1}}$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

b) Với điều kiện của x đã cho, ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)^2(x+\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$\text{Do } x > 0, x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} > 0 \Rightarrow B > 0$$

$$\text{Xét } Q - 2 = \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} - 2 = \frac{-2x - 2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$$

$$\text{Do } x > 0, x \neq 1 \text{ nên } -2x - 2\sqrt{x} < 0 \Rightarrow Q - 2 < 0 \Rightarrow Q < 2$$

Vậy $0 < Q < 2$ (đpcm)

Bài 2.

$$\text{a) Đặt } a = \sqrt{x-1}, b = \sqrt{x+2}$$

$$\Rightarrow b^2 - 2 + 5 + 3a = ab + 4b$$

$$\Leftrightarrow b^2 - ab - 4b + 3a + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(-b + a + 1)(b - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Với $b = a + 1 \Rightarrow x = b^2 - 2 = (a + 1)^2 - 2 = a^2 + 2a - 1$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a^2 + 2a - 2} \Leftrightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow x = a^2 + 2a - 1 = 2$$

Với $b = 3 \Rightarrow 3 = \sqrt{x + 2} \Rightarrow x = 7$

Kết luận: $x=2, x=7$

b) Đặt $a = \sqrt[3]{2x-1}, b = \sqrt[3]{y+1}$ thì phương trình thứ nhất của hệ có dạng:

$$a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2^4(x-1)^4 - 2x + 2 = 18 - 16x^3 + 48x^2 - 48x$$

$$\Leftrightarrow 16x^4 - 48x^3 + 48x^2 - 18x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ 16x^3 - 48x^2 + 48x - 18 = 0 \end{cases}$$

Ta có: $16x^4 - 48x^3 + 48x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow (2x-3)(8x^2 - 12x + 6) = 0$ (không có nghiệm nguyên)

Vậy $(x;y)=(0;-2)$

Bài 3.

a) Khi $m=0$, phương trình có dạng: $x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

b) Điều kiện để có 2 nghiệm âm phân biệt:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (2m+1)^2 + 4(m+1) > 0 \\ -(m+1) > 0 \\ 2m+1 < 0 \end{cases} \Rightarrow m < \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

c) Điều kiện phương trình có nghiệm: $\Delta = (2m+1)^2 + 4(m+1) = 4m^2 + 8m + 5 > 0 \forall m$

Teo Vi-et: $x_1 + x_2 = 2m + 1; x_1 x_2 = -(m + 1)$

$$K = \frac{(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{4m^2 + 5m + 2}{m^2 + 2m + 1}$$

$$\Rightarrow K \cdot (m^2 + 2m + 1) = 4m^2 + 5m + 2$$

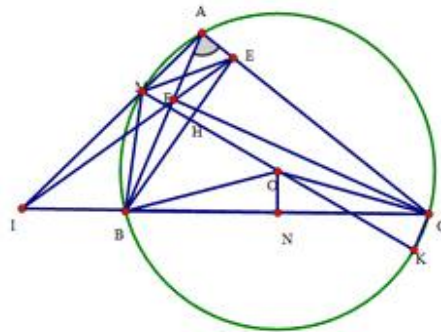
$$\Leftrightarrow (K-4)m^2 + (2K-5)m + (K-2) = 0$$

Điều kiện: $\Delta_m = 4K - 7 \geq 0 \Rightarrow K \geq \frac{7}{4}$

Suy ra $\text{Min}K = \frac{7}{4}$. Dấu “=” xảy ra khi $m = \frac{-1}{3}$

Vậy $m = \frac{-1}{3}$

Bài 4.



a) Góc $\widehat{BAC}$ chắn cung BC nên $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$ (Mối liên hệ góc ở tâm và góc nội tiếp)

$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 2.60^\circ = 120^\circ$$

Mà tam giác BOC cân tại O, ON là đường trung tuyến đồng thời là đường cao, đường phân giác

$$\Rightarrow BN = OB \cdot \sin \widehat{BON} = R \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow BC = 2BN = R\sqrt{3}$$

b) Tứ giác BFCE là tứ giác nội tiếp vì $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IFB} = \widehat{ICE}$

Ta dễ dàng chứng minh $\triangle IFB \sim \triangle ICE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IF}{IC} = \frac{IB}{IE} \Rightarrow IB \cdot IC = IF \cdot IE$ (1)

Tứ giác BCAM nội tiếp (O) nên $\widehat{ICA} = \widehat{BMA}$

Dễ dàng chứng minh $\triangle IMB \sim \triangle ICA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IB}{IA} = \frac{IM}{IC} \Rightarrow IB \cdot IC = IA \cdot IM$ (2)

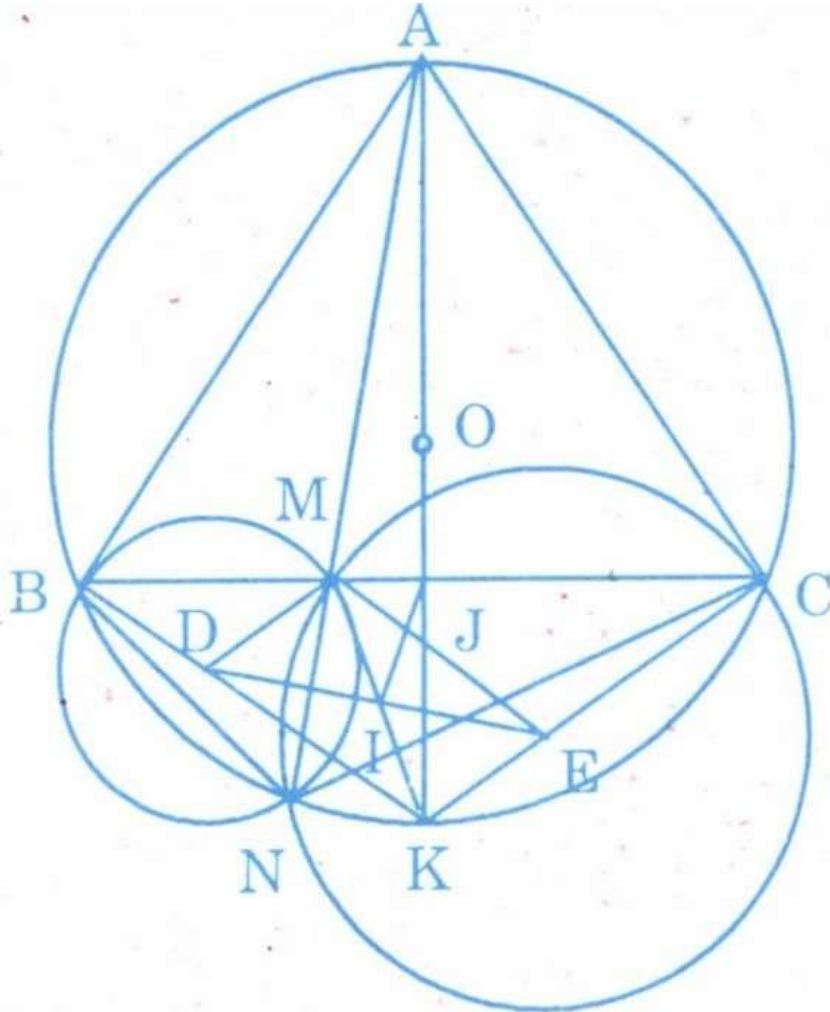
Từ (1) và (2) suy ra: $IF \cdot IE = IA \cdot IM \Rightarrow \frac{IF}{IA} = \frac{IM}{IE}$

Mà $\triangle IMF \sim \triangle IEA$ vì có I chung, $\frac{IF}{IA} = \frac{IM}{IE} \Rightarrow \widehat{IFA} = \widehat{IAE}$

Vậy tứ giác AMFE nội tiếp được trong một đường tròn.

c) Hướng dẫn: Chứng minh $AB.CK + AC.BK = BC.AK$

Bài 5.



a) Ta có $\widehat{MAC} = \widehat{MNC}$, $\widehat{MBA} = \widehat{BNM}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Suy ra $\widehat{MCA} + \widehat{MBA} = \widehat{MNC} + \widehat{BNM} \Rightarrow \widehat{BNC} + \widehat{BAC} = \widehat{MCA} + \widehat{MBA} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

Do đó tứ giác ABNC nội tiếp

b) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (vì tam giác ABC cân tại A)

Mà $\widehat{MNC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{MNC} = \widehat{ABC}$

Mặt khác: $\widehat{ANC} = \widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Do đó: $\widehat{MNC} = \widehat{ANC}$

Nên hai tia NA, NM trung nhau hay M, A, N thẳng hàng.

Mà $\triangle ACM \sim \triangle ANC$ (g.g) vì có $\widehat{CAM}$ chung, $\widehat{ACM} = \widehat{ANC}$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AC}{AN} \Rightarrow AC^2 = AM \cdot AN$$

c) Vẽ đường kính AK của đường tròn.

Ta có: $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{ABD} = 90^\circ$ (đường tròn (D) tiếp xúc AB tại B)

Suy ra B, D, K thẳng hàng.

Tương tự: C, E, K thẳng hàng. Do đó: AB = AC, OB = OC.

Suy ra A, O thuộc đường trung trực của BC $\Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow \widehat{BK} = \widehat{CK} \Rightarrow BK = CK$

$\triangle KBC$ cân tại K (BK=CK) $\Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{KCB}$

$\triangle DBM$ cân tại D (DB=DM) $\Rightarrow \widehat{DBM} = \widehat{DMB}$

$\triangle EMC$ cân tại E (EC=EM) $\Rightarrow \widehat{ECM} = \widehat{EMC}$

Do đó $\widehat{KBC} = \widehat{EMC}, \widehat{KCB} = \widehat{DMB} \Rightarrow KB \parallel EM, KC \parallel DM$

Mà I là trung điểm của DE nên I là trung điểm của MK. Gọi J là giao điểm của AK và BC.

$\triangle JMK$ vuông tại J có IJ là đường trung tuyến $\Rightarrow JI = KI$

JK cố định nên I thuộc đường thẳng cố định là đường trung trực của đoạn thẳng JK

Vậy I chạy trên đường trung trực của JK

Bài 6. Ta có

$$\begin{aligned} E &= x^2 - 4x + 1 + y^2 + 2y + 1 + xy - 2y + x - 2 + 2022 \\ &= (x-2)^2 + (y+1)^2 + (x-2)(y+1) + 2022 \\ &= (x-2)^2 + 2 \cdot (x-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot (y+1) + \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{3}{4}(y+1)^2 + 2022 \\ &= \left[(x-2) + \frac{1}{2}(y+1) \right]^2 + \frac{3}{4}(y+1)^2 + 2022 \geq 2022 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \min E = 2022$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $x = 2, y = -1$