

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH ĐỊNH
Đề chính thức**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO
LỚP 10 THPT
NĂM HỌC: 2024 - 2025
Môn thi chuyên: TOÁN
(CHUYÊN TOÁN)
Ngày thi: 05/6/2024
Thời gian làm bài: 150 phút
(không kể thời gian phát đề)**

Bài 1: (2.0 điểm)

1. Cho $a - b = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2024$.
2. Cho phương trình $x^2 - 6mx + 18m - 9 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn
 $(x_1^2 - 6mx_1 + 16m - 20)(x_2^2 - 6mx_2 + 17m - 7) = 15m - 28$.

Bài 2: (2,5 điểm)

1. Giải phương trình $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} - \frac{x+4}{x-3} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{5}{4}, (x \in \mathbb{R})$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - 2xy - y + 4x - 2 = 0 \\ x^2 - 3y - 3 = \sqrt{x^4 + 24} \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$.

Bài 3: (1,5 điểm)

1. Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $6x^2 - 2y^2 - xy + 4x + 2y = 7$.
2. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2 + 1}$ là một số nguyên dương. Chứng minh $8\sqrt{12n^2 + 1} + 8$ là một số chính phương.

Bài 4: (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và một dây cung BC cố định không là đường kính. Xét điểm A thay đổi trên (O) sao cho ABC là tam giác nhọn và $AB < AC$. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, B, C . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và I là trung điểm của BC .

1. Chứng minh $IEC = ICE$ và IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF .
2. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC . Đường thẳng PH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là Q khác H . Chứng minh $PD \cdot PI = PE \cdot PF$ và $AFQ = PIQ$.
3. Gọi L là điểm đối xứng với A qua O và M, X, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của L lên BC, CH, BH . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MNK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5: (1,0 điểm)

1. Chứng minh từ 5 số tự nhiên bất kì luôn tìm được 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 3.
2. Chứng minh từ 161 số tự nhiên bất kì luôn tìm được 81 số mà tổng của chúng chia hết cho 8

-----HẾT-----

TOÁN CHUYÊN

Bài 1:

- Cho $a - b = \sqrt{17 - 2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$. Tính giá trị biểu thức $A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2024$
- Cho phương trình $x^2 - 6mx + 18m - 9 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn
 $(x_1^2 - 6mx_1 + 16m - 20)(x_2^2 - 6mx_2 + 17m - 7) = 15m - 28$.

G

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có: } a - b &= \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} \\ &= \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{2} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2024 = a^3 + a^2 - b^3 + b^2 - 11ab + 2024 \\ &= (a^3 - b^3) + (a^2 + b^2) - 11ab + 2024 \\ &= (a-b)[(a-b)^2 + 3ab] + [(a-b)^2 + 3ab] - 11ab + 2024 \\ &= 3(9 + 3ab) + (9 + 3ab) - 11ab + 2024 \\ &= 27 + 9 + 2024 = 2060 \end{aligned}$$

Ta có:

$$2. \text{ PT: } x^2 - 6mx + 18m - 9 = 0$$

PT có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 nếu $\Delta' > 0$, tức là $(-3m)^2 - (18m - 9) > 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 18m + 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow 9(m^2 - 2m + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow 9(m-1)^2 > 0$$

Do đó, $m \neq 1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt. Ta có: x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình nên:

$$\begin{cases} x_1^2 - 6mx_1 + 18m - 9 = 0 \\ x_2^2 - 6mx_2 + 18m - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 6mx_1 + 16m - 20 = -2m - 11 \\ x_2^2 - 6mx_2 + 17m - 7 = -m + 2 \end{cases}$$

Thay lại vào giả thiết bài cho ta có:

$$(x_1^2 - 6mx_1 + 16m - 20)(x_2^2 - 6mx_2 + 17m - 7) = 15m - 28$$

$$\Leftrightarrow (-2m - 11)(-m + 2) = 15m - 28$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 11m - 22 - 15m + 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 8m + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(m^2 - 4m + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(m-1)(m-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (KTM) \\ m = 3 & (TM) \end{cases}$$

Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 2:

$$1. \text{ Giải phương trình } \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} - \frac{x+4}{x-3} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{5}{4}, (x \in \mathbb{R}).$$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - 2xy - y + 4x - 2 = 0 \\ x^2 - 3y - 3 = \sqrt{x^4 + 24} \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$

G

$$1. \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} - \frac{x+4}{x-3} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{G}{4} \quad (x \in \mathbb{R}; DK : x \notin \{\pm 2; \pm 3\})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-2} + 2 \right) + \frac{x-1}{x+2} - \left(\frac{x+4}{x-3} + \frac{5}{2} \right) - \left(\frac{x-4}{x+3} + \frac{3}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-3}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} - \frac{7x-7}{2(x-3)} - \frac{7x-7}{4(x+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{7}{2(x-3)} - \frac{7}{4(x+3)} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{3x+6+x-2}{(x-2)(x+2)} + \frac{-7}{2} \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{2(x+3)} \right) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{4(x+1)}{(x-2)(x+2)} + \frac{-7}{2} \cdot \frac{3(x+1)}{2(x-3)(x+3)} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{21}{4} \cdot \frac{1}{x^2-9} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ \frac{4}{x^2-4} - \frac{21}{4} \cdot \frac{1}{x^2-9} = 0 \end{cases}$$

Giai (*): $\frac{4}{x^2-4} = \frac{21}{4x^2-36}$

Nếu $\frac{4}{x^2-4} = \frac{21}{4x^2-36}$ thì một cách tương đương ta có: $16x^2 - 144 = 21x^2 - 84$ hay $5x^2 = -60$ (vô lí)

Thử lại ta thấy $x=1$ và $x=-1$ đều thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=-1$

$$2) \begin{cases} y^2 - 2xy - y + 4x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 - 3y - 3 = \sqrt{x^4 + 24} & (x, y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Ta viết pt (1) thành tam thức bậc hai theo ý như sau:

$$(1) \Leftrightarrow y^2 - (2x+1)y + 4x - 2 = 0$$

$$\text{Taco : } \Delta = (2x+1)^2 - 41(4x-2)$$

$$= 4x^2 + 4x + 1 - 16x + 8$$

$$= 4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{(2x+1) + (2x-3)}{2} = 2x-1 \\ y = \frac{(2x+1) - (2x-3)}{2} = 2 \end{cases}$$

Nếu $y=2$ thay vào (2) ta được: $x^2 - 9 = \sqrt{x^4 + 24}$ (vô lí vì $\sqrt{x^4 + 24} > x^2 > x^2 - 9$)

Nếu $y=2x-1$ thay vào (2) ta được: $x^2 - 3(2x-1) - 3 = \sqrt{x^4 + 24}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 - 3 = \sqrt{x^4 + 24}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x = \sqrt{x^4 + 24}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x > 0 \\ x^4 - 12x^3 + 36x^2 = x^4 + 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x > 0 \\ 12(x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} + 1$$

$\Rightarrow y = -2\sqrt{3} + 1$, thử lại ta thấy thỏa mãn

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-\sqrt{3} + 1; -2\sqrt{3} + 1)$

Bài 3:

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $6x^2 - 2y^2 - xy + 4x + 2y = 7$
2. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2 + 1}$ là một số nguyên dương. Chứng minh $8\sqrt{12n^2 + 1} + 8$ là một số chính phương

G 1)

$$\begin{aligned} \text{PT} \Leftrightarrow 7 &= 6x^2 - 2y^2 - xy + 4x + 2y \\ &= (3x - 2y)(2x + y) + 2(2x + y) \\ &= (2x + y)(3x - 2y + 2) \end{aligned}$$

Suy ra $(2x + y, 3x - 2y + 2) \in u^2(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$, ta xét các trường hợp:

$2x + y$	1	7	-1	-7
$3x - 2y + 2$	7	1	-7	-1
x	1	X	X	X
y	-1	x	x	x

$\forall (x; y) = (1; -1)$ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$2) \begin{cases} y^2 - 2xy - y + 4x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 - 3y - 3 = \sqrt{x^4 + 24} & (x, y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Ta viết pt (1) thành tam thức bậc hai theo ý như sau:

$$(1) \Leftrightarrow y^2 - (2x+1)y + 4x - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (2x+1)^2 - 4(4x-2) \\ &= 4x^2 + 4x + 1 - 16x + 8 \\ &= 4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{(2x+1) + (2x-3)}{2} = 2x-1 \\ y = \frac{(2x+1) - (2x-3)}{2} = 2 \end{cases}$$

Nếu $y=2$ thay vào (2) ta được: $x^2 - 9 = \sqrt{x^4 + 24}$ (vì $\sqrt{x^4 + 24} > x^2 > x^2 - 9$)

Nếu $y=2x-1$ thay vào (2) ta được: $x^2 - 3(2x-1) - 3 = \sqrt{x^4 + 24}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 - 3 = \sqrt{x^4 + 24}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x = \sqrt{x^4 + 24}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x > 0 \\ x^4 - 12x^3 + 36x^2 = x^4 + 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x > 0 \\ 12(x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} + 1$$

$\Rightarrow y = -2\sqrt{3} + 1$, thử lại ta thấy thỏa mãn

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-\sqrt{3} + 1; -2\sqrt{3} + 1)$

Bài 3:

1. Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $6x^2 - 2y^2 - xy + 4x + 2y = 7$.

2. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2 + 1}$ là một số nguyên dương. Chứng minh $8\sqrt{12n^2 + 1} + 8$ là một số chính phương.

G 1)

$$\begin{aligned} \text{PT} \Leftrightarrow 7 &= 6x^2 - 2y^2 - xy + 4x + 2y \\ &= (3x - 2y)(2x + y) + 2(2x + y) \\ &= (2x + y)(3x - 2y + 2) \end{aligned}$$

Suy ra $(2x + y, 3x - 2y + 2) \in u^2(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$, ta xét các trường hợp:

$2x + y$	1	7	-1	-7
$3x - 2y + 2$	7	1	-7	-1
x	1	X	X	X
y	-1	x	x	x

Vậy $(x; y) = (1; -1)$ là nghiệm duy nhất của phương trình

2) Vì $\sqrt{12n^2+1}$ là số nguyên dương nên $12n^2+1$ là số chính phương lẻ, t♦ đó ta có thể đặt $12n^2+1=(2k+1)^2, (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 12n^2=4k^2+4k$$

$$\Leftrightarrow k(k+1)=3n^2$$

Nhưng $(k; k+1)=1$ và phải có một trong hai số $k, k+1$ chia hết cho 3 nên ta có thể biểu diễn k và $k+1$ theo các trường hợp sau:

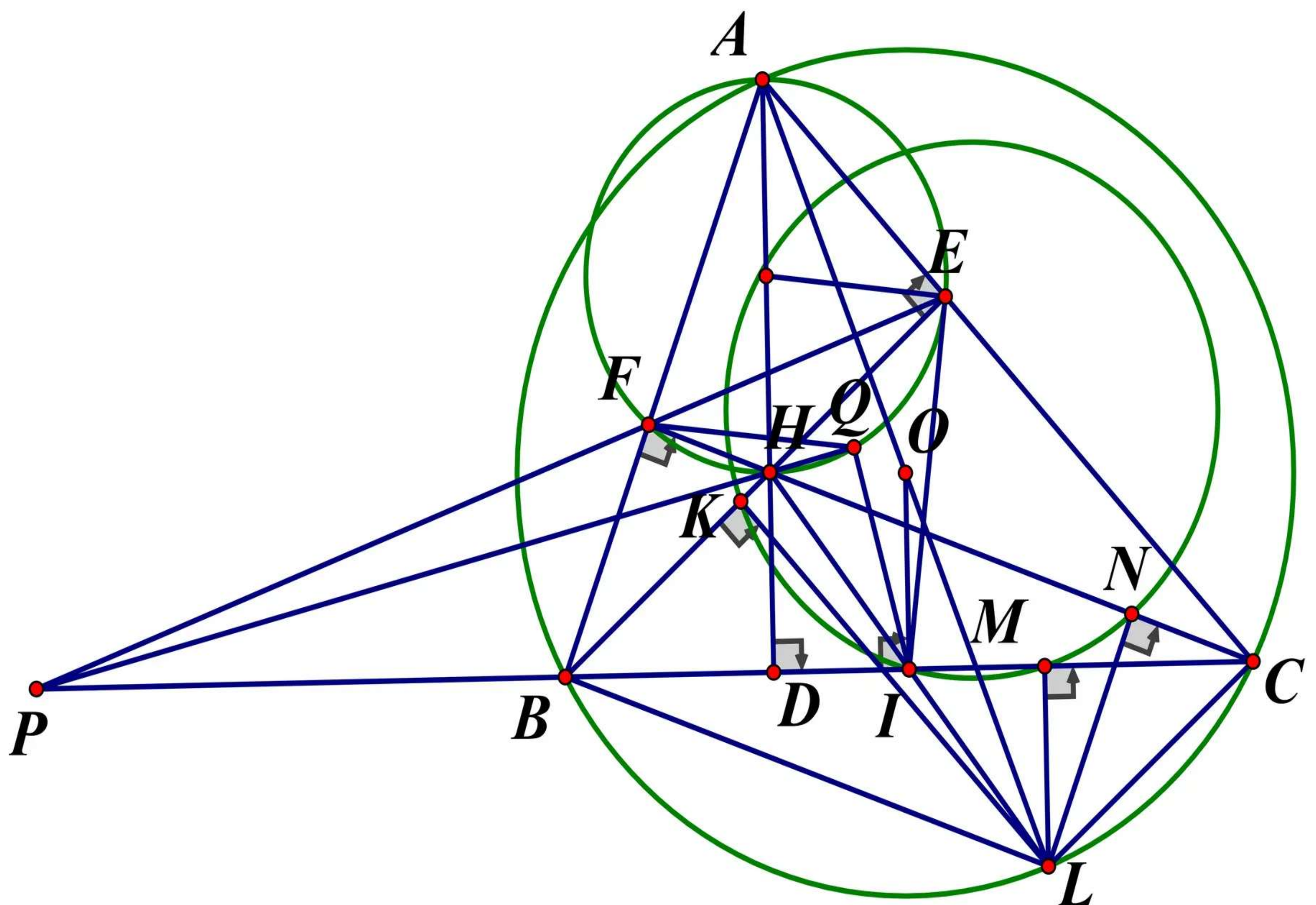
*) Nếu $\begin{cases} k=u^2 \\ k+1=3v^2 \end{cases}$

Khi đó $3v^2-u^2=1 \Leftrightarrow u^2=3v^2-1 \pmod{3}$ (vô lí)

*) Nếu $\begin{cases} k=3v^2 \\ k+1=3u^2 \end{cases}$

Khi đó: $8\sqrt{12n^2+1}+8=8(2k+1)+8=16(k+1)=16u^2$ là số chính phương Như vậy, $\sqrt{12n^2+1}$ nguyên thì $8\sqrt{12n^2+1}+8$ là một số chính phương.

Bài 4:



$$\frac{C}{M} IEC = ICE$$

IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle HEF$

G

Vì $\triangle BEC$ vuông tại E có EI là trung tuyến nên $\triangle IEC$ cân tại $I \Rightarrow IEC = ICE$ Ta có $AEHF$ là tứ giác nội tiếp ($\angle AEH + \angle AFH = 180^\circ$) mà tương tự ý trên ta cũng có $\angle IEB = \angle DAC$ nên IE là tiếp tuyến của (HEF)

$$CM : PD \cdot PI = PE \cdot PF \text{ và } AFQ = PIQ$$

$$2. \text{ Ta có: } EIC = EBI + BEI = 2EBI$$

$$\text{Dễ thấy } BFHD, AEHF \text{ là tứ giác nội tiếp nên } \angle DHF = \angle EBI = \angle DAC = \angle EFH$$

$$\text{Do đó } EIC = 2EBI = \angle DFH + \angle EFH = \angle DFE$$

$$\Rightarrow DFEI \text{ là tứ giác nội tiếp nên dễ chứng minh được } \triangle PFD \sim \triangle PIE$$

$$\Rightarrow \frac{PF}{PI} = \frac{PD}{PE} \Rightarrow PF \cdot PE = PD \cdot PI$$

$$\text{Lại có: } PF \cdot PE = PH \cdot PQ \text{ nên } PH \cdot PQ = PD \cdot PI \Rightarrow \triangle PHD \sim \triangle PIQ$$

$$\text{Do đó: } \angle HQI = \angle HDI = 90^\circ$$

$$\Rightarrow DHQI \text{ là tứ giác nội tiếp}$$

$$\text{Mà } \angle AQH = 90^\circ \text{ nên } A, Q, I \text{ thẳng hàng}$$

$$\text{Từ đây ta có: } PIQ = \angle IAC + \angle ICA = \angle IAC + \angle AFE = \angle AFQ \text{ (dpcm)}$$

$$3. \text{ CM: đường tròn ngoại tiếp } \triangle MNK \text{ luôn đi qua 1 điểm cố định } L \text{ đối xứng với } A \text{ qua } O \text{ nên } \angle BLC \text{ luôn vuông góc với } AB, AC$$

$$\text{Ta cũng có } AB \perp CH, AC \perp BH \text{ nên } LB \parallel CH, LC \parallel BH \text{ nên } BHCL \text{ là hình bình hành}$$

$$\text{Ta có } I \text{ là trung điểm } BC \text{ nên } I \text{ là trung điểm } HL$$

$$\text{Ta thấy } K, H, N, L \text{ cùng nằm trên 1 đường tròn (I, IH)}$$

$$\text{Ta có: } \angle KTN = 2\angle KCN = 2(180^\circ - \angle KHN) = 2\angle BAC$$

$$\begin{aligned} \angle KMN &= 180^\circ - \angle KMB - \angle NMC = (90^\circ - \angle KLB) + (90^\circ - \angle NLC) = \angle HBL + \angle HCL \\ &= 2(180^\circ - \angle BHC) = 2 \cdot \angle BAC = \angle KIN \end{aligned}$$

$$\text{Do đó, } K, I, M, N \text{ cùng nằm trên 1 đường tròn hay } I \text{ nằm trên } (KMN)$$

$$\text{Mà } I \text{ là điểm cố định khi } A \text{ di chuyển trên } (O). \text{ Do đó } (KMN) \text{ luôn đi qua 1 điểm cố định là trung điểm } BC.$$

Bài 5:

1. Chứng minh từ 5 số tự nhiên bất kì luôn tìm được 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 3.
2. Chứng minh từ 161 số tự nhiên bất kì luôn tìm được 81 số mà tổng của chúng chia hết cho 8

Giai

$$1. \text{ Một số khi chia cho 3 sẽ có số dư là } 0; 1; 2$$

$$\text{TH1: Trong 5 số đó có đủ 3 số dư khi chia cho 3, Khi đó ta chỉ cần chọn bộ 3 số có 3 số dư khác nhau khi chia cho 3 là thỏa mãn bài toán.}$$

$$\text{TH2: Trong 5 số đó chỉ có 2 số dư khi chia cho 3. Theo nguyên lý Dirichlet chỉ tồn tại ít nhất}$$

$$\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil + 1 = 3 \text{ số có cùng số dư khi chia cho 3. Khi đó tổng 3 số có cùng số dư Khi chia cho 3 sẽ chia hết cho 3.}$$

2. Trong 161 số tự nhiên đó, ta luôn chọn được 3 số mà tổng của chúng là a chia hết cho 3. Tương tự trong 158 số còn lại ta luôn chọn được 3 số mà tổng của chúng là a_2 chia hết cho 3, cứ lập luận như vậy ta sẽ được các tổng $a_1, a_2, \dots, a_{53}$ chia hết cho 3.

CM tương tự câu 1 ta cũng thấy được trong 5 số chia hết cho 3 ta luôn chọn được 3 số có tổng chia hết cho 9, vì thế trong 53 số $a_1, a_2, \dots, a_{53}$ ta chọn được 3 số mà tổng của chúng là b_1 chia hết cho 9, tương tự trong 50 số còn lại ta cũng chọn được 3 số có tổng là b_2 chia hết cho 9. Cứ tiếp tục như vậy ta cũng thu được các tổng $b_1 b_2 \dots b_{12}$ chia hết cho 9.

Lập luận tương tự như trên từ các số $b_1, b_2, \dots, b_{12}$ ta cũng chọn được các tổng $c_1, c_2, \dots, c_5$ chia hết cho 27, và trong 5 số ta luôn chọn được tổng d của 3 số sao cho d chia hết cho 81, mà d là tổng của 81 số từ 161 số tự nhiên bất kì nên ta có thể kết thúc chứng minh