ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

ĐỀ DỰ TUYỂN MÔN TOÁN NĂM HỌC 2021 - 2022
Ngày thi : Thứ Bảy 25/9/2021
Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. (5 điểm) Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=3$.

a) Chứng minh rằng

$$a^{4n}+b^{4n}+c^{4n}+a^nb^n+b^nc^n+c^na^n\geq 6, \forall n\in\mathbb{N}.$$

b) Hỏi bất đẳng thức trên còn đúng với $n=\frac{2}{3}$?

Bài 2. (5 điểm) Cho n là số nguyên dương chẵn, có tổng tất cả các ước dương của nó là số lẻ. Chứng minh rằng tổng tất cả các ước chính phương (nhỏ hơn n) của n sẽ lớn hơn $\frac{n}{4}$.

Bài 3. (5 điểm) Cho tam giác ABC, gọi A_1,B_1,C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của A, B, C qua BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng A_1,B_1,C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\cos A.\cos B.\cos C=\frac{-3}{8}.$$

Bài 4. (5 điểm) Một quốc gia có 99 thành phố, khoảng cách giữa hai thành phố bất kì không vượt quá 1000 km. Hai thành phố thuộc quốc gia này được gọi là *"xa nhau"* nếu khoảng cách giữa chúng lớn hơn hoặc bằng $500\sqrt{2}$ km. Hỏi quốc gia này có nhiều nhất bao nhiêu cặp thành phố *xa nhau*.

------------------HẾT--------------------