

Câu 1 (6,0 điểm). Cho đa thức $P(x) = x^{2024} + a_1x^{2023} + \dots + a_{2023}x + a_{2024}$, với $a_1, a_2, \dots, a_{2024} \in \mathbb{R}$.

Biết $a_{2022} = 0$, $a_{2024} \neq 0$, $\frac{a_{2023}}{a_{2024}} > 2025$ và đa thức $P(x)$ có 2024 nghiệm thực.

Ký hiệu $P_n(x) = \underbrace{P(P(\dots(P(x))\dots))}_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n , đa thức $P_n(x)$ có cả nghiệm âm và nghiệm dương.

Câu 2 (7,0 điểm). Xét tất cả các số nguyên k thỏa mãn $2024 \mid 11^n + k \cdot 195^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $|k|$.

Câu 3 (7,0 điểm). Cho B, C là hai điểm cố định trên đường tròn (O) và A là điểm di động trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn, không cân. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và A' là điểm đối xứng với A qua tâm O . Một đường thẳng đi qua H cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F sao cho $AE = AF$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai $M \neq A$.

a) Chứng minh rằng H, M, A' thẳng hàng.

b) Gọi I, J (khác M) lần lượt là các giao điểm của ME, MF với (O) ; D là điểm chính giữa cung BC không chứa A ; P là giao điểm của DI với AB và Q là giao điểm của DJ với AC . Chứng minh rằng khi A di động trên (O) thì đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

-----HẾT-----

YÊU CẦU CHUNG

* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.

* Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu hình, nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.

* Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,5 điểm. Đối với điểm thành phần lớn hơn 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,5 điểm.

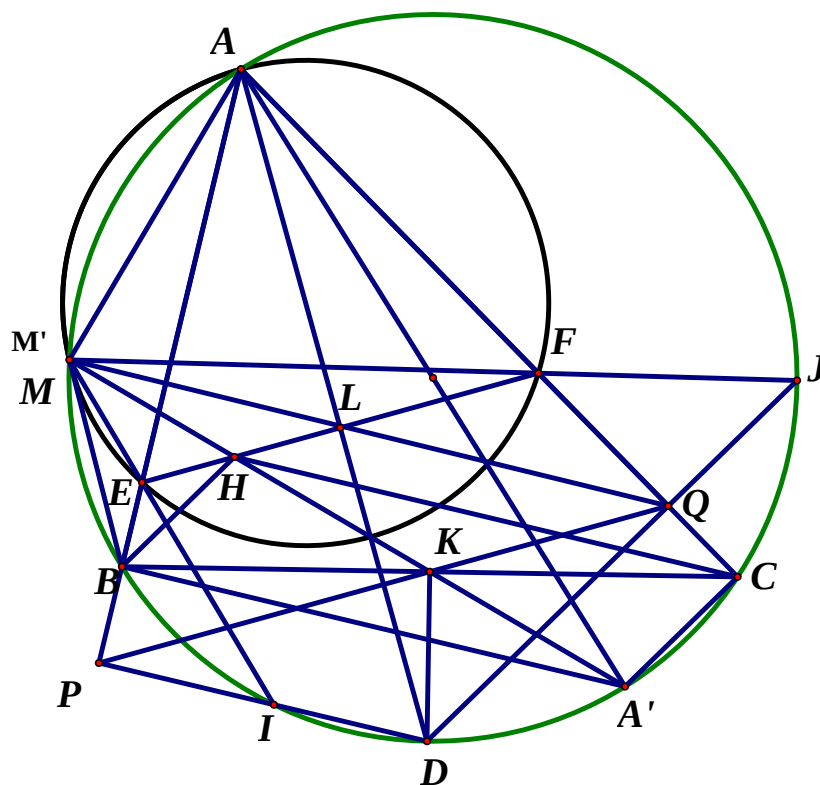
* Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng bài.

* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (6,0 điểm).	Ta chứng minh đa thức $P(x)$ có cả nghiệm âm và nghiệm dương. Thật vậy, gọi $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ là các nghiệm của $P(x)$. Vì $a_{2024} \neq 0 \Rightarrow x_i \neq 0, \forall i = \overline{1, 2024} \Rightarrow \frac{1}{x_i}, \forall i = \overline{1, 2024}$, là các nghiệm của đa thức $Q(x) = x^{2024} P\left(\frac{1}{x}\right) = a_{2024} x^{2024} + a_{2023} x^{2023} + \dots + a_1 x + 1$.	1,0
	Theo định lý Viet, ta có $\sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{x_i} = \frac{-a_{2023}}{a_{2024}} < -2025 < 0 \quad (1)$ $\sum_{1 \leq i < j \leq 2024} \frac{1}{x_i \cdot x_j} = \frac{a_{2022}}{a_{2024}} = 0 \quad (2)$	1,0
	Từ (1) suy ra tồn tại $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq 2024: \frac{1}{x_i} < 0 \Rightarrow x_i < 0 \Rightarrow P(x)$ có nghiệm âm. Nếu tất cả các nghiệm của $P(x)$ đều âm thì $\sum_{1 \leq i < j \leq 2024} \frac{1}{x_i x_j} > 0$. Mâu thuẫn với (2) Vậy $P(x)$ có nghiệm dương.	1,0
	Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp. Đa thức $P_n(x)$ có cả nghiệm âm và nghiệm dương với mọi số $n \in \mathbb{N}^*$. (*) Theo chứng minh trên, (*) đúng khi $n = 1$. Giả sử $P_k(x)$ có cả nghiệm âm và nghiệm dương với $k \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $P_{k+1}(x)$ cũng có cả nghiệm âm và nghiệm dương.	0,5

	Gọi x_1, x_2 tương ứng là nghiệm nhỏ nhất, lớn nhất của $P(x)$ và y_1 là nghiệm lớn nhất của $P_k(x)$. Suy ra $x_1 < 0, x_2 > 0; y_1 > 0$. Ta có $P(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $P(x_1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty$ và x_1 là nghiệm nhỏ nhất của $P(x)$ nên tập giá trị của $P(x)$ trên $(-\infty, x_1]$ là $[0; +\infty)$.	1,0
	$P(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $P(x_2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ và x_2 là nghiệm lớn nhất của $P(x)$ nên tập giá trị của $P(x)$ trên $[x_2, +\infty)$ là $[0; +\infty)$. Vì $y_1 \in (0, +\infty)$ nên $\exists t_1 \in (-\infty, x_1), \exists t_2 \in (x_2, +\infty) : P(t_1) = P(t_2) = y_1$. Do đó $P_{k+1}(t_i) = P_k(P(t_i)) = P_k(y_1) = 0$ với $i = 1, 2$.	1,0
	Suy ra $P_{k+1}(x)$ có nghiệm âm t_1 và nghiệm dương t_2. Theo nguyên lý quy nạp Toán học, đa thức $P_n(x)$ có cả nghiệm âm và nghiệm dương, với mọi số nguyên dương n.	0,5
Câu 2 (7,0 điểm).	Gọi k là số nguyên thỏa mãn bài toán, ta chứng minh $2024 \mid 11^n + k.195^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow k = 11m \equiv -1 \pmod{184}, m \in \mathbb{Z}$. Thật vậy, ta có $2024 = 11.184$ Vì $2024 \mid 11^n + k.195^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Suy ra $11 \mid 11^n + k.195^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Mà $(11, 195) = 1 \Rightarrow 11 \mid k \quad (1)$	1,0
	Vì $2024 \mid 11^n + k.195^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Suy ra $184 \mid 11^n + k.195^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mà $195 \equiv 11 \pmod{184}$ Suy ra $184 \mid 11^n + k.11^n = 11^n(k+1)$	1,0
	$(184, 11) = 1$ suy ra $184 \mid k+1 \quad (2)$ Từ (1) và (2), ta có $k = 11m, 184 \mid k+1 (m \in \mathbb{Z})$.	0,5
	Ngược lại, với $k = 11m, 184 \mid k+1 (m \in \mathbb{Z})$ Suy ra $11 \mid 11^n + k.195^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3)$	0,5
	Vì $195 \equiv 11 \pmod{184}$ nên $11^n + k.195^n \equiv 11^n + k.11^n = 11^n(k+1) \equiv 0 \pmod{184}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (4)$	1,0
	Lại có $(184, 11) = 1$ nên từ (3) và (4), suy ra $2024 \mid 11^n + k.195^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy $2024 \mid 11^n + k.195^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow k = 11m \equiv -1 \pmod{184}, m \in \mathbb{Z}$.	1,0
	Với $k = 11m \equiv -1 \pmod{184}, m \in \mathbb{Z}$, ta có: $11.(-67) \equiv -1 \pmod{184}, 11m \equiv -1 \pmod{184}$ Suy ra $11m \equiv 11.(-67) \pmod{184} \Rightarrow m \equiv -67 \pmod{184}, (\text{Vì } (184, 11) = 1)$ Do đó $m = -67 + 184t, t \in \mathbb{Z}$.	1,0
	Suy ra $k = -737 + 2024t, t \in \mathbb{Z}$. Ngược lại, với $k = -737 + 2024t, t \in \mathbb{Z}$ thì $k = 11m \equiv -1 \pmod{184}, m \in \mathbb{Z}$. Vậy $2024 \mid 11^n + k.195^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow k = -737 + 2024t, t \in \mathbb{Z}$. Do đó $\min k = 737$.	1,0

Câu 3a
(3,5
điểm).



Gọi K là trung điểm của BC và $M' \neq A'$ là giao điểm điểm $A'H$ với (O)
Vì tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành nên K là trung điểm của $A'H$
Do đó K, H, M', A' thẳng hàng.

0,5

Vì H là trực tâm của tam giác ABC

Suy ra $EBH = FCH$ (cùng phụ với BAC)

Vì $AE = AF$ nên $AEF = AFE$, suy ra $BEH = CFH$

Do đó tam giác BEH đồng dạng với tam giác CFH , suy ra $\frac{BE}{CF} = \frac{BH}{CH}$ (1)

1,0

Vì tam giác $KM'B$ đồng dạng với tam giác KCA' nên $\frac{M'B}{A'C} = \frac{KM'}{KC}$

tam giác $KM'C$ đồng dạng với tam giác KBA' nên $\frac{KM'}{KB} = \frac{M'C}{A'B}$

mà $KB = KC$, suy ra $\frac{M'B}{M'C} = \frac{A'C}{A'B} = \frac{BH}{CH}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\frac{M'B}{M'C} = \frac{BE}{CF}$ hay $\frac{BM'}{BE} = \frac{CM'}{CF}$ (3)

1,0

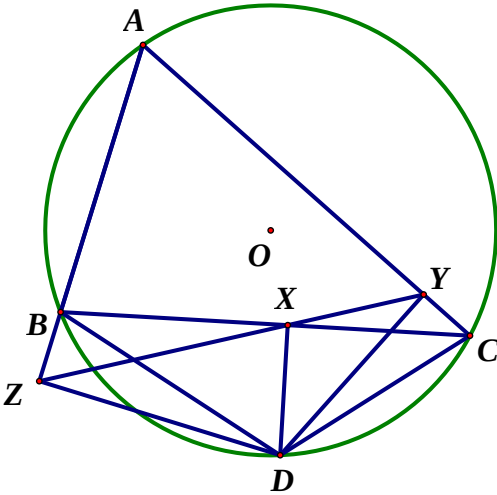
Mặt khác $M'BE = M'CF$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra tam giác $M'EB$ đồng dạng với tam giác $M'FC$.

nên $M'EB = M'FC$ do đó $M'EA = M'FA$, suy ra tứ giác $M'AFE$ nội tiếp

Do đó $M' \equiv M$. Vậy H, M, A' thẳng hàng. (Đpcm).

1,0

Câu 3b (3,5 điểm).	Bổ đề: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và $D \in (O)$, (không trùng với A, B, C). Gọi X, Y và Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên các đường thẳng BC, CA và AB. Khi đó X, Y và Z thẳng hàng. 	0,5
	Chứng minh bổ đề Các tứ giác $ACDB, BXDZ$ và $XYCD$ nội tiếp nên $YCD = ZBD = ZXD$ và $YCD + YXD = 180^\circ$, suy ra $YXD + DXZ = 180^\circ$ nên X, Y và Z thẳng hàng.	0,5
	Trở lại bài toán Ta có D là điểm chính giữa của cung BC nên AD là phân giác của BAC Mà $AE = AF$ suy ra AD vuông góc với EF tại L, tức là $FLD = 90^\circ$	0,5
	Ta có K là trung điểm của BC và D là điểm chính giữa cung BC nên $DK \perp BC$ (*)	0,5
	Tứ giác $MAFE$ nội tiếp nên $AEF = AMF$ (5) Mặt khác $ADQ = ADJ = AMJ = AMF$ (6) Từ (5), (6) suy ra $LDQ = ADQ = AEF = AFE$ nên tứ giác $LFQD$ nội tiếp Mà $FLD = 90^\circ$ nên $FQD = 90^\circ$ hay $DQ \perp AC$ (**)	0,5
	Tứ giác $MAFE$ nội tiếp nên $AFE + AME = 180^\circ$ Tứ giác $MADI$ nội tiếp nên $AME + LDI = 180^\circ$ Hơn nữa $AEF = AFE$ Suy ra $LDI = AEF$, do đó tứ giác $LEPD$ nội tiếp. Mặt khác $ELD = 90^\circ$ nên $EPD = 90^\circ$ hay $DP \perp AB$ (***)	0,5
	Từ (*), (**) và (***) ta có K, Q, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của $D \in (O)$ lên BC, AC và AB. Áp dụng bổ đề, ta được P, Q và K thẳng hàng. Vậy PQ luôn đi qua điểm cố định K, là trung điểm của BC.	0,5

----- Hết -----