

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH TUYỀN QUANG**

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS NĂM 2021
Môn thi: **TOÁN**

Thời gian làm bài: **150 phút**, không kể thời gian giao đề

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi này có 01 trang)

Câu 1. (5.0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức : $S = \frac{1}{1^2 + 2.1} + \frac{1}{3^2 + 2.3} + \frac{1}{5^2 + 2.5} + \dots + \frac{1}{2021^2 + 2.2021}$

b) Cho $a; b > 0$ thỏa mãn : $\sqrt{a+1} + \sqrt{2b} = 6$. Chứng minh : $a + b^3 \geq 11$

Câu 2. (5.0 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau :

a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

b)
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2x - y + 1 = 0 \\ \sqrt{2x + y - 1} - x + 2 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi D là tiếp điểm của BC với đường tròn (I) ; AI cắt lại đường tròn (O) tại điểm $M \neq A$; MD cắt lại đường tròn (O) tại $Q \neq M$; AP là đường kính của đường tròn (O) . Chứng minh rằng

a) $DMBQ$ đồng dạng với tam giác MDB

b) $MI^2 = MQ.MD$

c) Ba điểm $P; I; Q$ thẳng hàng

Câu 4. (3,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên x thỏa $A = \frac{2x+1}{3x+1} \in \mathbb{Z}$

b) Chứng minh rằng : $2^{\frac{2^p-1}{3}} - 1$ chia hết cho $2^p - 1$ với mọi số nguyên tố $p > 3$

Câu 5. (2,0 điểm)

Có hai chiếc máy in thẻ đặc biệt A và B có thể in ra những tấm thẻ có chứa các bộ số có dạng $(a; b)$ trong đó a là mã số của thẻ; b là mã số của người dùng thẻ đó (trên mỗi thẻ có đúng 1 bộ số). Khi đưa thẻ có chứa bộ số $(a; b)$ vào máy in A máy sẽ in ra thẻ có bộ số $(6a; b+5)$ và trả lại thẻ có bộ số $(a; b)$ ban đầu; khi đưa hai thẻ có bộ số $(a; b)$ và $(b; c)$ vào máy in B máy sẽ in ra thẻ có bộ số $(6a; c)$ và trả lại 2 thẻ có bộ số $(a; b)$ và $(b; c)$ ban đầu. Hỏi từ thẻ có bộ số $(22, 12)$ ban đầu; hai máy in A; B có thể in ra thẻ có bộ số $(1975; 304)$ hay không? Vì sao.

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – TUYỂN QUANG (2020 – 2021)

Câu 1:

a) Ta có công thức tổng quát : $(2n+1)^2 + 2.(2n+1) = (2n+1)(2n+3)$

Và nhận thấy $(2n+3) - (2n+1) = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2n+1)^2 + 2(2n+1)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

Áp dụng ta có : $1^2 + 2.1 = 1.3$; $3^2 + 2.3 = 3.5$; $5^2 + 2.5 = 5.7$,.....;
 $2021^2 + 2.2021 = 2021.2023$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S &= \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{2019.2021} + \frac{1}{2021.2023} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2021} + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2023} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2023} \right) = \frac{1011}{2023} \end{aligned}$$

b) Bất đẳng thức cần chứng minh $a+1 + b^3 \geq 12$

Theo bất Cô Si ta được : $(a+1) + b^3 \geq 4\sqrt{a+1}$

$$\text{Và } b + 8^3 \geq 2\sqrt{8b} = 4\sqrt{2b}$$

$$\text{Cộng lại ta có : } (a+1) + b + 12^3 \geq 4(\sqrt{a+1} + \sqrt{2b}) = 4.6 = 24 \Rightarrow a + b^3 \geq 11$$

Câu 2:

a) Giải phương trình : $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

$$\text{Đặt } t = x^2 \text{ (} t \geq 0 \text{)} \quad t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3) = 0$$

$$\begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{3}$$

Kết luận : $x = \pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{3}$ là các nghiệm của phương trình

b) Giải hệ phương trình :

$$x^2 + xy - 2x - y + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{2x + y - 1} - x + 2 = 0 \quad (2)$$

Xét phương trình (1) $\hat{U} (x-1)^2 + y(x-1) = 0 \hat{U} (x-1)(x+y-1) = 0$

$$\hat{U} \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 1-y \end{cases}$$

Xét $x = 1 \Rightarrow \sqrt{y+1} + 1 = 0$ (thay vào (2)) (vô nghiệm)

Xét $x = 1 - y$ thay vào (2) ta được : $\sqrt{1 - y} + y + 1 = 0$

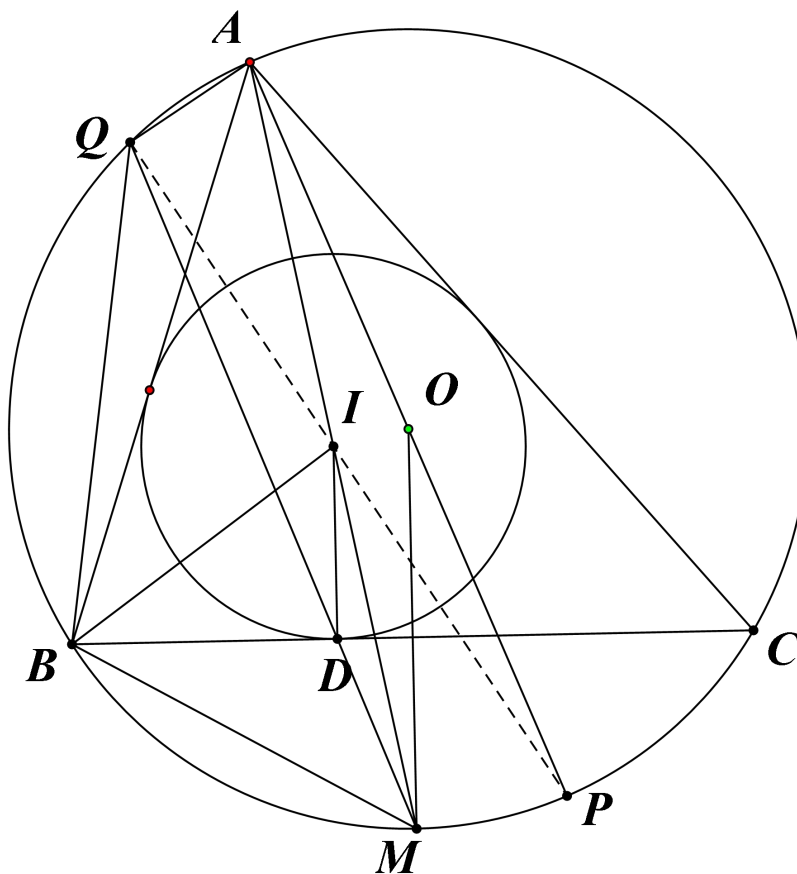
$$\sqrt{1-y} = -y-1 \quad y-1 \neq 0 \quad y-1$$

$$-y = y^2 + 2y + 1 \quad y^2 + 3y = 0 \quad y-3$$

Khi $y = -3$ và $x = 4$

Kết luận : $(x; y) = (4; -3)$ là nghiệm của hệ phương trình

Câu 3:



a) Ta có AI là phân giác góc $\widehat{BAC} \Rightarrow MB = MC$ (M là điểm chính giữa cung nhỏ BC)

Do đó $\widehat{DBM} = \widehat{BQM}$ (2 góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Vậy $\triangle BMD$ đồng dạng $\triangle QMB \Rightarrow \frac{MB}{MQ} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MB^2 = MD \cdot MQ$

b) Ta chứng minh : $\widehat{MBI} = \widehat{MIB}$

Ta có : $\widehat{MIB} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB}$ và $\widehat{IBA} = \widehat{CBI}$ (BI là phân giác $\widehat{ABC}$)

Và $\widehat{IAB} = \widehat{CAM} = \widehat{MBC} \Rightarrow \widehat{MIB} = \widehat{CBI} + \widehat{MBC} = \widehat{MBI}$ vậy nên tam giác MIB cân ở M

Vậy nên $MI^2 = MD \cdot MQ$

c) Ta có : $\widehat{AQI} = \widehat{AQM} - \widehat{IQM} = 180^\circ - \widehat{ACM} - \widehat{IQM}$

Lại có $ID // OM \Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{AMO}$ (so le trong)

Và $MI^2 = MD \cdot MQ \Rightarrow \frac{MI}{MD} = \frac{MQ}{MI} \Rightarrow \triangle MIQ$ đồng dạng $\triangle MDI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IQM} = \widehat{DIM}$

Và cũng có : $\widehat{ACM} = \frac{1}{2} \widehat{AOM} = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\widehat{AMO}) = 90^\circ - \widehat{AMO}$

Thay vào ta có $\widehat{AQI} = 180^\circ - 90^\circ + \widehat{AMO} - \widehat{AMO} = 90^\circ$ (1)

Mặt khác AP là đường kính của đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{AQP} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) ta được ba điểm $P; I; Q$ thẳng hàng (đpcm)

Câu 4:

a) Tìm tất cả các số nguyên x thỏa $A = \frac{2x+1}{3x+1} \in \mathbb{Z}$

Ta có : $A = \frac{2x+1}{3x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x+1) \mid (3x+1)$ (vì tử và mẫu đều là số nguyên)

$\Rightarrow 3(2x+1) \mid (3x+1) \Rightarrow 2(3x+1) + 1 \mid (3x+1) \Rightarrow 1 \mid (3x+1)$

$$\begin{cases} 3x+1 = 1 \\ 3x+1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \text{ (thử lại thấy thỏa mãn)}$$

b) Ta chứng minh : $2^{p-1} - 1 \mid (3^p)$

Ta có $(2; p) = 1$ (vì p nguyên tố $p > 3$) nên $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (đlý Ferrmat nhỏ)

Vậy $2^{p-1} - 1 \mid p$

Và p lẻ nên $p = 2m + 1$ (vì p nguyên tố $p > 3$)

Nên $2^{p-1} - 1 = 2^{2m} - 1 = 4^m - 1 \mid (4 - 1) \mid 2^{p-1} - 1 \mid$

Mặt khác $(3; p) = 1$ nên $2^{p-1} - 1 \mid (3^p - 1) \mid \frac{2^{p-1} - 1}{3} \mid p$

Vậy $\frac{2^{p-1} - 1}{3} \mid p \mid \frac{2^{p-1} - 1}{3} = pb \ (b \in \mathbb{Z}^+)$

Do đó $2^{\frac{2^{p-1}-1}{3}} - 1 = 2^{pb} - 1 = (2^p)^b - 1^b \mid (2^p - 1) \mid$ (đpcm)