

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ (với $x > 0; x \neq 1$)

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

Câu 2. (1,5 điểm) Cho phương trình $(x-1)(x^2-2x+m)=0$ (1) với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt thỏa

mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{3}$

Câu 3. (2,0 điểm)

- Giải phương trình : $(x-1)(x-3)+6=4\sqrt{x^2-4x+6}$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2+4xy+10x-12y^2-12y+9=0 \\ \sqrt{3y-2}-\sqrt{\frac{x+5}{2}}=xy-2y-2 \end{cases}$$

Câu 4. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC . Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của M lên các đường thẳng BC, CA . Đường thẳng IJ cắt đường thẳng AB tại K

- Chứng minh bốn điểm B, K, M, I cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra $MK \perp AB$
- Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh bốn điểm M_1, M_2, M_3, H thẳng hàng
- Chứng minh khi điểm M di động trên cung nhỏ BC ta luôn có $M_2M_4 \leq 4R \cdot \sin \angle BAC$. Xác định vị trí của điểm M khi dấu bằng xảy ra

Câu 5. (1,0 điểm)

- Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2-6y^2+xy+2y-x-7=0$
- Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $x^2-2021y^2+2022$ chia hết cho xy . Chứng minh rằng x, y là các số lẻ và nguyên tố cùng nhau

Câu 6. (1,0 điểm)

- Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=2$. Chứng minh $\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} \geq 1$
- Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{ab+a+b+1}+c=6$
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2a+1}{a+1} + \frac{2b+1}{b+1} + \frac{2c+2}{c+2}$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ (với $x > 0; x \neq 1$)

c) Rút gọn biểu thức P

$$\begin{aligned} P &= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x} = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

$$P = \frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 2 \geq 2\sqrt{2\sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}}} + 2 = 2\sqrt{6} + 2$$

$$\text{Vậy } \min P = 2\sqrt{6} + 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (tmdk)}$$

Câu 2. (1,5 điểm) Cho phương trình $(x-1)(x^2-2x+m)=0$ (1) với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{3}$

Ta có :

$$(x-1)(x^2-2x+m)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-2x+m=0(*) \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' = 1-m > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow m < 1$$

Do vai trò các nghiệm như nhau, gọi $x_3=1$ và phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

thỏa hệ thức Vi-et : $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=m \end{cases}$. Ta có :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{m} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow m = -3 \text{ (tmdk)}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

c) Giải phương trình : $(x-1)(x-3)+6=4\sqrt{x^2-4x+6}$

$$\text{Phương trình đã cho} \Leftrightarrow x^2-4x+6-\sqrt{x^2-4x+6}+3=0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2-4x+6} \geq 0$. Phương trình trở thành :

$$t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow x^2-4x+6=1 \text{ (vô nghiệm)} \\ t=3 \Rightarrow x^2-4x+6=9 \Leftrightarrow x=2 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = 2 \pm \sqrt{7}$$

d) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2+4xy+10x-12y^2-12y+9=0(1) \\ \sqrt{3y-2}-\sqrt{\frac{x+5}{2}}=xy-2y-2(2) \end{cases}$$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow x^2 + 2(5+2y)x - 12y^2 - 12y + 9 = 0$

$$\Delta_x' = 16(y+1)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2y-1 \\ x = -6y-9(ktm) \end{cases} \cdot \text{Với } x = 2y-1$$

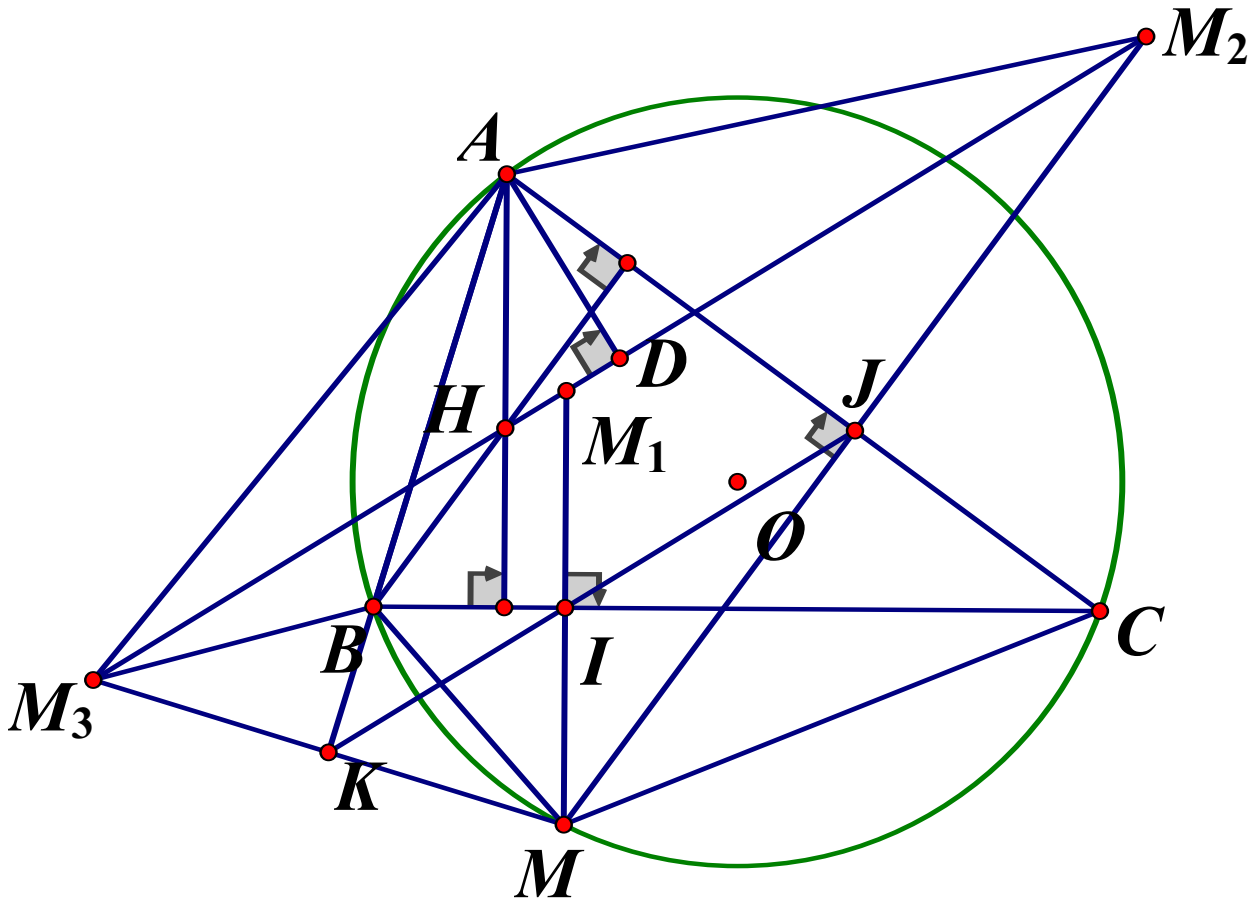
$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow \sqrt{3y-2} - \sqrt{y+2} = 2y^2 - 3y - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(y-2)}{\sqrt{3y-2} + \sqrt{y+2}} - (y-2)(2y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-2=0 \Rightarrow y=2; x=3 \\ \frac{2}{\sqrt{3y-2} + \sqrt{y+2}} - 2y-1=0 \left(ktm \text{ do } y \geq \frac{2}{3} \right) \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (3; 2)$

Câu 4. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC . Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của M lên các đường thẳng BC, CA . Đường thẳng IJ cắt đường thẳng AB tại K



d) Chứng minh bốn điểm B, K, M, I cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra

$$MK \perp AB$$

Ta có $\angle MIC = \angle MJC = 90^\circ (gt) \Rightarrow IJCM$ là tứ giác nội tiếp

Do đó $\angle KIM = \angle JCM$ (góc trong bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện)

Tứ giác $ABMC$ nội tiếp nên $\angle KBM = \angle ACM = \angle JCM$

Từ đó suy ra $\angle KIM = \angle KBM \Rightarrow BIMK$ là tứ giác nội tiếp

Vậy bốn điểm B, K, M, I cùng thuộc một đường tròn

e) Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh bốn điểm M_1, M_2, M_3, H thẳng hàng

Ta có : $IJ \parallel M_1M_2, JK \parallel M_2M_3$

Và theo giả thiết I, J, K thẳng hàng nên ta có các điểm M_1, M_2, M_3 thẳng hàng

Ta có $\angle AM_3B + \angle AHB = \angle AMB + (180^\circ - \angle ACB)$

Mà ta có $\angle AMB = \angle ACB$, nên $\angle AM_3B + \angle AHB = 180^\circ$ nên tứ giác $AHBM_3$ nội tiếp

Từ đó ta có $\angle AHM_3 = \angle ABM_3 = \angle ABM$. Hoàn toàn tương tự, ta có $AHCM_2$ nội tiếp

Từ đó ta có $\angle AHM_2 = \angle ACM_2 = \angle ACM$

Mà ta có $\angle ACM + \angle ABM = 180^\circ$, vì tứ giác $ABMC$ nội tiếp

$\Rightarrow \angle AHM_3 + \angle AHM_2 = 180^\circ$

Từ đó suy ra M_3, H, M_2 thẳng hàng

f) Chứng minh khi điểm M di động trên cung nhỏ BC ta luôn có $M_2M_3 \leq 4R \cdot \sin \angle BAC$. Xác định vị trí của điểm M khi dấu bằng xảy ra

Vì M_2, M_3 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AC, AB nên ta có :

$AM = AM_2 = AM_3 \Rightarrow \triangle AM_2M_3$ cân tại A

Kẻ đường cao AD của tam giác $AM_2M_3 \Rightarrow AD$ cũng là phân giác của $\angle M_2AM_3$

Mặt khác ta có $\angle M_2AM_3 = \angle M_3AM = \angle MAM_2 = 2\angle MAB + 2\angle MAC = 2\angle BAC$

$\Rightarrow \angle M_3AD = \angle BAC$

Trong tam giác vuông M_3AD có $\angle M_3D = AM_3 \sin \angle M_3AD = AM \sin \angle BAC$

Mà $M_2M_3 = 2M_3D \Rightarrow M_2M_3 = 2AM \cdot \sin \angle BAC$

Vậy $M_2M_3 \leq 4R \sin \angle BAC$

Câu 5. (1,0 điểm)

c) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - 6y^2 + xy + 2y - x - 7 = 0$

Phương trình đã cho :

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x+3y) + 2y - x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x+3y-1) = 7 = (-7) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-7) = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1$$

$$* \begin{cases} x-2y = -7 \\ x+3y-1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{7}{5} \text{ (ktm)} \quad * \begin{cases} x-2y = -1 \\ x+3y-1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (tm)}$$

$$* \begin{cases} x-2y = 1 \\ x+3y-1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{7}{5} \text{ (ktm)} \quad * \begin{cases} x-2y = 7 \\ x+3y-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên cần tìm : $(x; y) = (-3; 1); (5; -1)$

d) Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $x^2 - 2021y^2 + 2022$ chia hết cho xy . Chứng minh rằng x, y là các số lẻ và nguyên tố cùng nhau

Nếu x, y là hai số chẵn thì $x^2 - 2021y^2 + 2022$ không chia hết cho 4 và xy chia hết cho 4 (vô lý)

Nếu x, y có 1 số chẵn, 1 số lẻ thì $x^2 - 2021y^2 + 2022$ là số lẻ và xy là số chẵn (vô lý)

Giả sử $(x, y) = d \Rightarrow x^2 - 2021y^2 \text{ \& } xy : d^2$

Từ gt suy ra $2022 : d^2 \text{ mà } 2022 = 2.3.337 \Rightarrow d \in \{1; 2; 3; 337\}$

Câu 6. (1,0 điểm)

c) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b = 2$. Chứng minh $\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} \geq 1$

Xét BDT $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ với $x, y > 0$. Biến đổi tương đương:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 \geq 2abxy \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Khi đó } \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} \geq \frac{(a+b)^2}{a+b+2} = 1 \text{ (đpcm)}$$

d) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{ab+a+b+1} + c = 6$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2a+1}{a+1} + \frac{2b+1}{b+1} + \frac{2c+2}{c+2}$

$$\text{Ta có : } P = 6 - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} - \frac{2}{c+2}$$

$$\text{Theo BDT Cô si ta có : } \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \geq \frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} = \frac{2}{6-c}$$

$$\text{Khi đó } P \leq 6 - \frac{2}{6-c} - \frac{2}{c+2}. \text{ Ta có :}$$

$$\frac{1}{6-c} + \frac{1}{c+2} \geq \frac{4}{6-c+c+2} = \frac{1}{2} \text{ (do } 0 < c < 6) \Rightarrow P \leq 5$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} a+1=b+1 \\ 6-c=c+2 \\ \sqrt{(a+1)(b+1)}+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=3 \\ c=2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \text{Max } P = 5 \Leftrightarrow a = b = 3, c = 2$$