

HSG9 Tỉnh Bắc Kạn 2021-2022

Câu 1.(5,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A = \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{a + \sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 2} - \frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} - 1}$ với $a \geq 0; a \neq 1$

- a) Rút gọn biểu thức A.
- b) Tìm tất cả các giá trị của a để $A > 2$.

2) Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{\sqrt{7 + \sqrt{5}} + \sqrt{7 - \sqrt{5}}}{\sqrt{7 + 2\sqrt{11}}}$.

Câu 2.(3,0 điểm) Cho đường thẳng (d): $y = (3 + m)x + m - 1$ (với m là tham số)

- a) Tìm điểm cố định của đường thẳng (d).
- b) Tìm m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Câu 3.(4,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x - 2018 + 4\sqrt{x - 2022}} + \sqrt{x - 2013 - 6\sqrt{x - 2022}} = 3$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy + 2x - 4y = 0 \\ x^2 - y^2 = -4 \end{cases}$$

Câu 4.(3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC vuông tại A có các đường trung tuyến AD và BE vuông góc với nhau tại G. Biết $AB = 3$ cm, tính cạnh huyền BC.

2) Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{BC}{AB + AC}$.

Câu 5.(3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ các đường tròn (P) đường kính BH, đường tròn (Q) đường kính HC. Hai đường tròn này cắt AB, AC lần lượt tại D và E. Chứng minh:

- a) $AD \cdot AB = AE \cdot AC$.
- b) DE là tiếp tuyến chung của (P) và (Q).
- c) Tính tỉ số diện tích của tứ giác DEQP và tam giác ABC.

Câu 6.(2,0 điểm)

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2 = x(x + 1)(x + 7)(x + 8)$.

2) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ba} \geq 9.$$

---Hết---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.(5,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A = \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{a + \sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 2} - \frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} - 1}$ với $a \geq 0; a \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để $A > 2$.

2) Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{\sqrt{7 + \sqrt{5}} + \sqrt{7 - \sqrt{5}}}{\sqrt{7 + 2\sqrt{11}}}$.

Lời giải

1)

a) Với $a \geq 0; a \neq 1$. Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{3a + 3\sqrt{a} - 3}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2)} - \frac{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2)} + \frac{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 2)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2)} \\ &= \frac{3a + 3\sqrt{a} - 3 - (a - 1) - (a - 4)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2)} = \frac{a + 3\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2)} \\ &= \frac{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} + 2)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2)} = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}. \end{aligned}$$

b) $A > 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} > 2 \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{a} + 3}{\sqrt{a} - 1} > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{a} + 3 > 0 \\ \sqrt{a} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{a} + 3 < 0 \\ \sqrt{a} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < a < 9 \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a < 9$$

Kết hợp điều kiện ta được $1 < a < 9$ thỏa mãn.

2) $B = \frac{\sqrt{7 + \sqrt{5}} + \sqrt{7 - \sqrt{5}}}{\sqrt{7 + 2\sqrt{11}}}$.

$$\Rightarrow B^2 = \frac{7 + \sqrt{5} + 7 - \sqrt{5} + 2\sqrt{(7 + \sqrt{5})(7 - \sqrt{5})}}{7 + 2\sqrt{11}}$$

$$= \frac{14 + 2\sqrt{44}}{7 + 2\sqrt{11}} = 2$$

Vì $B > 0$ nên $B = \sqrt{2}$.

Câu 2.(3,0 điểm) Cho đường thẳng (d): $y = (3 + m)x + m - 1$ (với m là tham số)

a) Tìm điểm cố định của đường thẳng (d).

b) Tìm m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Lời giải

a) Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của d. Khi đó : $y_0 = (3 + m)x_0 + m - 1$ đúng với mọi m

$$(x_0 + 1)m + 3x_0 - y_0 - 1 = 0 \text{ đúng với mọi } m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ 3x_0 - y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -4 \end{cases}$$

Vậy điểm cố định của đường thẳng (d) là điểm $M(-1; -4)$.

b) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm O xuống đường thẳng (d) suy ra

$$d(O; d) = OH \leq OM = \sqrt{17} \text{ (Với } M \text{ là điểm cố định của } (d)).$$

Đường thẳng OM có phương trình $y = 4x$.

$$\Rightarrow (d) \perp OM \Leftrightarrow 3 + m = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{13}{4}.$$

Vậy $m = -\frac{13}{4}$ thì khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3.(4,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x - 2018 + 4\sqrt{x - 2022}} + \sqrt{x - 2013 - 6\sqrt{x - 2022}} = 3$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy + 2x - 4y = 0 \\ x^2 - y^2 = -4 \end{cases}$.

Lời giải

1) ĐK : $x \geq 2022$

$$PT \Leftrightarrow \left| \sqrt{x - 2022} + 2 \right| + \left| \sqrt{x - 2022} - 3 \right| = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 2022} + 2 + \left| \sqrt{x - 2022} - 3 \right| = 3 \quad (*)$$

TH1: $2022 \leq x < 2031$ PTVN

TH2: $x \geq 2031$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x - 2022} = 2 \Leftrightarrow x = 2026 \text{ (không tm)}$$

Vậy PTVN.

$$2) \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy + 2x - 4y = 0 & (1) \\ x^2 - y^2 = -4 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow (x - y + 2)(x - 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\text{Với } x = y - 2, (2) \Rightarrow (y - 2)^2 - y^2 = -4 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Với } x = 2y, (2) \Rightarrow (2y)^2 - y^2 = -4 \Leftrightarrow 3y^2 = -4 \text{ (PTVN)}$$

Vậy HPT có nghiệm (0; 2).

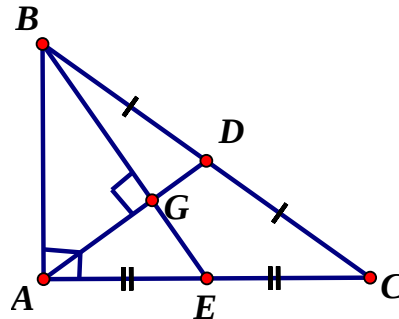
Câu 4.(3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC vuông tại A có các đường trung tuyến AD và BE vuông góc với nhau tại G. Biết AB = 3 cm, tính cạnh huyền BC.

2) Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{BC}{AB + AC}$.

Lời giải

1)

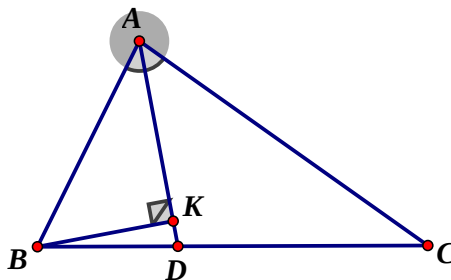


Ta có $BC = 2AD = 3AG$; $AD = BD$; $AG = 2GD$.

$$\text{Mà } AG^2 = 9 - BG^2 = 9 - (AD^2 - GD^2) = 9 - \left(\frac{3}{2}AG\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AG\right)^2$$

$$\Leftrightarrow AG^2 = 3 \Leftrightarrow AG = \sqrt{3} \text{ cm. Vậy } BC = 3AG = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

2)



Kẻ đường phân giác AD ta có $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD + DC}{AB + AC} = \frac{BC}{AB + AC}$ (1)

Kẻ đường cao BK ta có $BK \leq BD$; $\sin \widehat{BAK} = \frac{BK}{AB} \leq \frac{BD}{AB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{BC}{AB + AC}$.

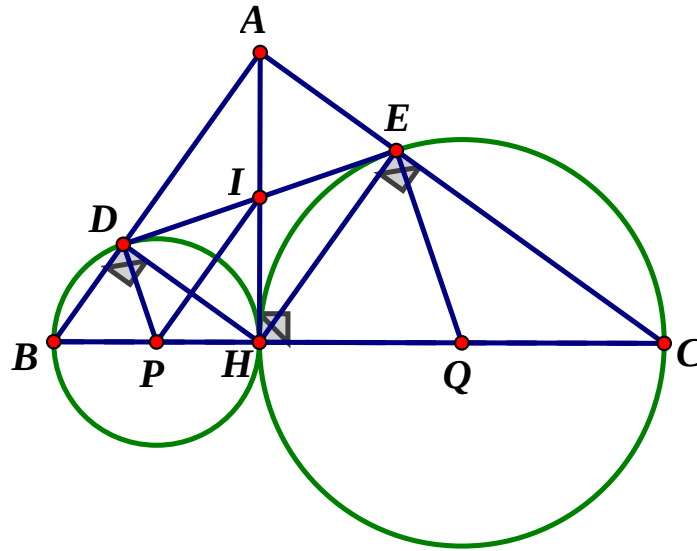
Câu 5.(3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ các đường tròn (P) đường kính BH, đường tròn (Q) đường kính HC. Hai đường tròn này cắt AB, AC lần lượt tại D và E. Chứng minh:

a) $AD \cdot AB = AE \cdot AC$.

b) DE là tiếp tuyến chung của (P) và (Q).

c) Tính tỉ số diện tích của tứ giác DEQP và tam giác ABC.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BDH} = \widehat{HEC} = 90^\circ$

Xét $\triangle BAH$ vuông tại H, có $HD \perp AB \Rightarrow AH^2 = AD \cdot AB$ (1)

$\triangle HAC$ vuông tại H, có $HE \perp AC \Rightarrow AH^2 = AE \cdot AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD \cdot AB = AE \cdot AC$

b) Xét tứ giác AEHD có: $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{D} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác AEHD là hình chữ nhật.

Gọi I là giao điểm của DE và AH. Ta có

$\triangle IDH$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{IHD}$

$\triangle PDH$ cân tại P ($PD = PH = \frac{BH}{2}$) $\Rightarrow \widehat{PDH} = \widehat{PHD}$

$\Rightarrow \widehat{IDH} + \widehat{PDH} = \widehat{IHD} + \widehat{PHD}$ mà $\widehat{IHD} + \widehat{PHD} = 90^\circ$ ($AH \perp BC$)

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (P) (*).

Tương tự $\triangle IEH$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{IHE} = \widehat{IEH}$

$\triangle QHE$ cân tại Q ($QH = QE = \frac{HC}{2}$) $\Rightarrow \widehat{QHE} = \widehat{QEH}$

$\Rightarrow \widehat{IHE} + \widehat{QHE} = \widehat{IEH} + \widehat{QEH}$ mà $\widehat{IHE} + \widehat{QHE} = 90^\circ$ ($AH \perp BC$)

$\Rightarrow \widehat{IEH} + \widehat{QEH} = \widehat{QED} = 90^\circ \Rightarrow DE \perp QE$

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (Q) (**)

Từ (*) và (**) ta được DE là tiếp tuyến chung của đường tròn (P) và đường tròn (Q).

c) Tứ giác DEQP là hình thang vuông ($DP \perp DE$, $QE \perp DE$)

$$\Rightarrow S_{DEQP} = \frac{1}{2}(DP + QE) \cdot DE = \frac{1}{2}\left(\frac{BH}{2} + \frac{HC}{2}\right) \cdot AH = \frac{1}{2} \frac{BC}{2} AH = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_{DEQP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}.$$

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2 = x(x+1)(x+7)(x+8)$.

2) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ba} \geq 9.$$

Lời giải

1) Đặt $x^2 + 8x = t$. Ta có $y^2 = t(t+7) \Leftrightarrow 4y^2 = (2t+7)^2 - 49$

$$\Leftrightarrow (2t+7-2y)(2t+7+2y) = 49$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2t+7-2y=1 \\ 2t+7+2y=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-y=-3 \\ t+y=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=9 \\ y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x=9 \\ y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=12 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-9 \\ y=12 \end{cases}.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2t+7-2y=49 \\ 2t+7+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-y=21 \\ t+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=9 \\ y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x=9 \\ y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-12 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-9 \\ y=-12 \end{cases}.$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2t+7-2y=7 \\ 2t+7+2y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-y=0 \\ t+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-8 \\ y=0 \end{cases}.$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2t+7-2y=-7 \\ 2t+7+2y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-y=-7 \\ t+y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-7 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x=-7 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-7 \\ y=0 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là

$(1; 12), (-9; 12), (1; -12), (-9; -12), (0; 0), (-8; 0), (-1; 0), (-7; 0)$.

$$2) \text{ Ta có } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \quad (1) \text{ vì } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)(a+b+c) \geq \frac{9}{a+b+c}$$

$$\text{do } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}; a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Áp dụng BĐT (1) ta có

$$\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ac} + \frac{1}{c^2 + 2ba} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac + 2bc + 2ab} = \frac{9}{(a+b+c)^2} = 9.$$