

Bài 1. (6,0 điểm)

1) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^{2021} + b^{2021} = a^{2022} + b^{2022} = a^{2023} + b^{2023}$.

Tính tổng $S = a^{2024} + b^{2024}$.

2) Cho phương trình: $x^2 - (2m+5)x + 3m+4 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả số nguyên m để phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

Bài 2. (5,0 điểm)

1) Giải phương trình:
$$\begin{cases} x^2\sqrt{y} + x\sqrt{y} - 2 = x^2 + x - 2\sqrt{y} & (1) \\ \sqrt{3xy - y^2 - 1} = 2x - y - 1 & (2) \end{cases}; (x, y \in \mathbb{R}).$$

2) Cho a, b, c là ba số dương, chứng minh rằng:
$$\frac{a(b-c)}{c(c+a)} + \frac{b(c-a)}{a(a+b)} + \frac{c(a-b)}{b(b+c)} \geq 0.$$

Bài 3. (1,5 điểm)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$.

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) , tia phân giác trong AD (D thuộc cạnh BC) cắt đường tròn (O) tại E khác A . Đường tròn đường kính DE cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA . Vẽ các đường cao AK, CL của tam giác ABC , hai đường thẳng KL và MN cắt nhau tại T . Chứng minh rằng:

1) Bốn điểm K, T, C, N cùng thuộc một đường tròn và $TAB = MAC$.

2) Ba điểm A, T, F thẳng hàng.

Bài 5. (1,5 điểm)

Người ta viết lên bảng dãy số $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2024}$. Mỗi lần xóa đi hai số bất kì x, y trên bảng và viết thêm số $x + y + xy$. Sau một số lần thực hiện như vậy thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại đó.

-----Hết-----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Bài 1. (6,0 điểm)

1) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^{2021} + b^{2021} = a^{2022} + b^{2022} = a^{2023} + b^{2023}$.

Tính tổng $S = a^{2024} + b^{2024}$.

2) Cho phương trình: $x^2 - (2m+5)x + 3m+4 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả số nguyên m để phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

Lời giải

1) Từ đề, suy ra
$$\begin{cases} a^{2022} + b^{2022} = a^{2021} + b^{2021} \\ a^{2022} + b^{2022} = a^{2023} + b^{2023} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^{2023} - 2a^{2022} + a^{2021} + b^{2023} - 2b^{2022} + b^{2021} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^{2021}(a-1)^2 + b^{2021}(b-1)^2 = 0 \Rightarrow a = b = 1 \text{ (do } a, b > 0)$$

$$\text{Vậy } a^{2024} + b^{2024} = 1 + 1 = 2.$$

$$2) \text{ Ta có } \Delta = (2m+5)^2 - 4(3m+4) = 4m^2 + 8m + 9 = (2m+2)^2 + 5.$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương.

$$\text{Đặt } (2m+2)^2 + 5 = k^2 \text{ (với } k \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow (2m+2-k)(2m+2+k) = -5$$

Vì $m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$ nên ta có bảng sau:

$2m+2-k$	-5	1	-1	5
$2m+2+k$	1	-5	5	-1
m	-2	-2	0	0
k	3	-3	3	-3
Kết luận	nhận	loại	nhận	loại

- Với $m = -2$, ta được phương trình $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$, hai nghiệm này đều là số nguyên nên

$m = -2$ thỏa.

- Với $m = 0$, ta được phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$, hai nghiệm này đều là số nguyên nên

$m = 0$ thỏa.

- Vậy $m = -2; 0$ thỏa YCBT.

Bài 2. (5,0 điểm)

1) Giải phương trình:
$$\begin{cases} x^2\sqrt{y} + x\sqrt{y} - 2 = x^2 + x - 2\sqrt{y} & (1) \\ \sqrt{3xy - y^2} - 1 = 2x - y - 1 & (2) \end{cases}; (x, y \in \mathbb{R}).$$

2) Cho a, b, c là ba số dương, chứng minh rằng:
$$\frac{a(b-c)}{c(c+a)} + \frac{b(c-a)}{a(a+b)} + \frac{c(a-b)}{b(b+c)} \geq 0.$$

Lời giải

1) Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0; 3xy \geq y+1$.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{y}(x^2 + x + 2) - (x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 2)(\sqrt{y} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 2 = 0 & (3) \\ \sqrt{y} - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

- Giải (3): $x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$: phương trình này vô nghiệm.

- Giải (4): $\sqrt{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (thỏa)

Thay $y = 1$ vào phương trình (2), ta được:

$$\sqrt{3x-2} = 2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ 3x-2 = 4x^2-8x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2-11x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{3}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (2; 1)$.

2. * Ta chứng minh $(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \geq abc(a+b)(b+c)(c+a)$

$$\begin{aligned} - \text{Ta có } (a^2 + bc)(b^2 + ca) &= a^2b^2 + ca^3 + b^3c + abc^2 \\ &= a^2b^2 + ab^2c + a^2bc + abc^2 + ca^3 + b^3c - ab^2c - a^2bc \\ &= ab(b+c)(c+a) + c(a^3 + b^3 - ab^2 - a^2b) \\ &= ab(b+c)(c+a) + c(a+b)(a-b)^2 \end{aligned}$$

Suy ra $(a^2 + bc)(b^2 + ca) \geq ab(b+c)(c+a)$ (1). Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

- Tương tự ta chứng được:

$$(b^2 + ca)(c^2 + ab) \geq bc(a+b)(c+a) \quad (2). \text{ Dấu "=" xảy ra khi } b = c.$$

$$(c^2 + ab)(a^2 + bc) \geq ca(a+b)(b+c) \quad (3). \text{ Dấu "=" xảy ra khi } c = a.$$

Nhân vế theo vế (1), (2), (3) ta được:

$$\begin{aligned} (a^2 + bc)^2 (b^2 + ca)^2 (c^2 + ab)^2 &\geq a^2b^2c^2 (a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2 \\ \Leftrightarrow (a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) &\geq abc(a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

$$* \text{ Ta có } \frac{a(b-c)}{c(c+a)} + \frac{b(c-a)}{a(a+b)} + \frac{c(a-b)}{b(b+c)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{ab-ca}{c(c+a)} + \frac{bc-ab}{a(a+b)} + \frac{ca-bc}{b(b+c)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab-ca}{c(c+a)} + 1 + \frac{bc-ab}{a(a+b)} + 1 + \frac{ca-bc}{b(b+c)} + 1 \geq 3 \Leftrightarrow \frac{c^2+ab}{c(c+a)} + \frac{a^2+bc}{a(a+b)} + \frac{b^2+ca}{b(b+c)} \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô - si, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{c^2+ab}{c(c+a)} + \frac{a^2+bc}{a(a+b)} + \frac{b^2+ca}{b(b+c)} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{c(c+a)} \cdot \frac{a^2+bc}{a(a+b)} \cdot \frac{b^2+ca}{b(b+c)}} \\ &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{c(c+a) \cdot a(a+b) \cdot b(b+c)}} = 3 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

$$\text{Do đó } \frac{a(b-c)}{c(c+a)} + \frac{b(c-a)}{a(a+b)} + \frac{c(a-b)}{b(b+c)} \geq 0. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } a = b = c.$$

Bài 3. (1,5 điểm)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$.

Lời giải

Ta có $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y(x+1) - 3x^2 + 2x - 8 = 0$ (1)

Cách 1: (1) $\Leftrightarrow y^2 + 2y(x+1) - 3x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y(x+1) + (x+1)^2 - 4x^2 = 9$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)^2 - 4x^2 = 9 \Leftrightarrow (-x+y+1)(3x+y+1) = 9.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ nên ta có bảng sau

$-x+y+1$	-9	-1	1	9	-3	3
$3x+y+1$	-1	-9	9	1	-3	3
x	2	-2	2	-2	0	0
y	-8	-4	2	6	-4	2

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là:

$$(x; y) = (-2; -4), (-2; 6), (0; -4), (0; 2), (2; -8), (2; 2).$$

Cách 2: Ta có $\Delta'_y = (x+1)^2 - (-3x^2 + 2x - 8) = 4x^2 + 9$.

Điều kiện cần để phương trình (1) có nghiệm nguyên là Δ'_y là số chính phương.

$$\text{Đặt } \Delta'_y = k^2 \ (k \in \mathbb{N}) \text{ hay } 4x^2 + 9 = k^2 \Leftrightarrow (2x-k)(2x+k) = -9 \quad (2).$$

Vì $x \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$ nên ta có bảng sau

$2x-k$	-9	1	-1	9	3	-3
$2x+k$	1	-9	9	-1	-3	3
x	-2	-2	2	2	0	0
k	5	-5	5	-5	-3	3
Kết luận	nhận	loại	nhận	loại	nhận	loại

$$\text{- Với } x = -2 \text{ thì } \begin{cases} y = -4 \\ y = 6 \end{cases}.$$

$$\text{- Với } x = 0 \text{ thì } \begin{cases} y = -4 \\ y = 2 \end{cases}.$$

$$\text{- Với } x = 2 \text{ thì } \begin{cases} y = -8 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là:

$$(x; y) = (-2; -4), (-2; 6), (0; -4), (0; 2), (2; -8), (2; 2).$$

Bài 4. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O) , tia phân giác trong AD (D thuộc cạnh BC) cắt đường tròn (O) tại E khác A . Đường tròn đường kính DE cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA . Vẽ các đường cao AK, CL của tam giác ABC , hai đường thẳng KL và MN cắt nhau tại T . Chứng minh rằng:

1) Bốn điểm K, T, C, N cùng thuộc một đường tròn và $TAB = MAC$.

2) Ba điểm A, T, F thẳng hàng.

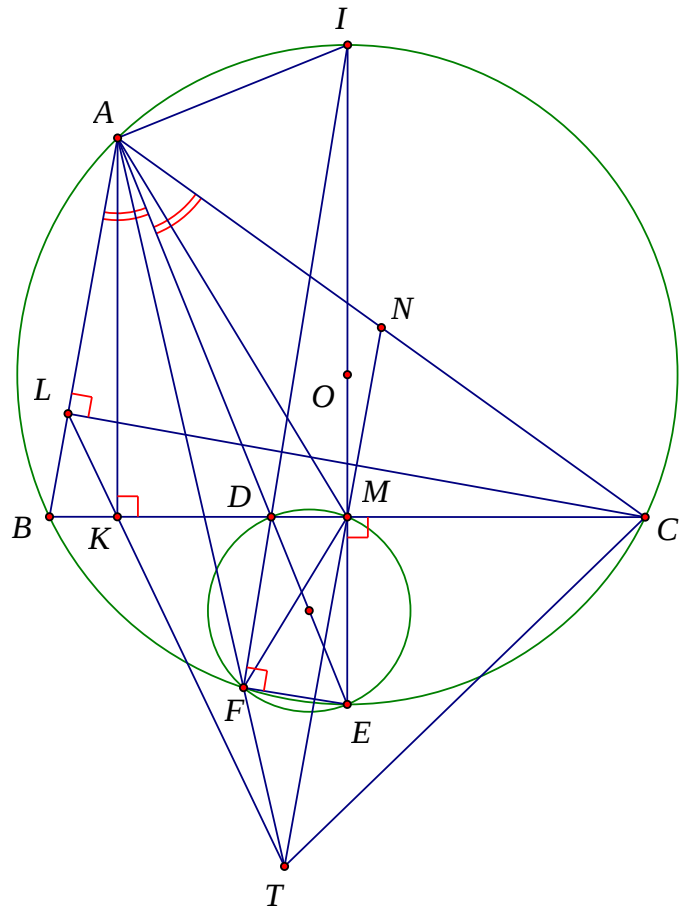
Lời giải

1) * **Chứng minh K, T, C, N cùng thuộc một đường tròn**

Vì $ALC = AKC = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ACKL$ nội tiếp $\Rightarrow BKL = BAC$ (1).

Vì MN là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AB \Rightarrow BAC = MNC$ hay $BAC = TNC$ (2).

Lại có $BKL = TKC$ (đối đỉnh) (3).



Người ta viết lên bảng dãy số $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2024}$. Mỗi lần xóa đi hai số bất kì x, y trên bảng và viết thêm số $x + y + xy$. Sau một số lần thực hiện như vậy thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại đó.

Lời giải

$$\text{Xét tích } P = \left(\frac{1}{1} + 1\right) \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{2024} + 1\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{2025}{2024} = 2025.$$

Khi xóa đi hai số bất kì x, y thì P bị mất đi hai thừa số $x+1, y+1$. Nhưng khi viết thêm số $x + y + xy$ thì P có thêm thừa số $x + y + xy + 1 = (x+1)(y+1)$, như vậy giá trị của P không đổi.

Do đó sau một số lần thực hiện đến khi trên bảng còn lại một số thì giá trị P vẫn không đổi $\Rightarrow$ số còn lại trên bảng là số 2024.