

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
AN GIANG

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 – 2024

Khóa ngày: 03/06/2023

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang)

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (1,0 điểm)

Thực hiện phép tính: $A = \frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{7} - 2\sqrt{2}$.

Câu 2. (1,0 điểm)

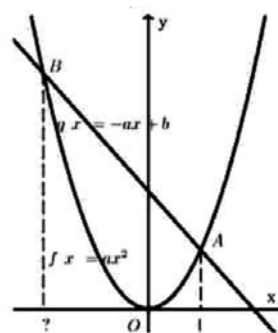
Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \sqrt{3}y = 6 - 2\sqrt{3} \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Câu 3. (1,0 điểm)

Phương trình $x^2 + ax + b = 0$ (với $a; b$ là các số nguyên) có một nghiệm là $5 + \sqrt{21}$. Tính nghiệm còn lại.

Câu 4. (1,0 điểm)

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f(x) = ax^2$ và $g(x) = -ax + b$ ($a; b$ là các số thực), điểm chung thứ nhất có hoành độ bằng 1. Tìm hoành độ của điểm chung thứ hai của hai đồ thị.



Câu 5. (1,5 điểm)

Cho $x^3 + y^3 = 189$ và $(x+y)(x+1)(y+1) = 270$. Tính $x+y$.

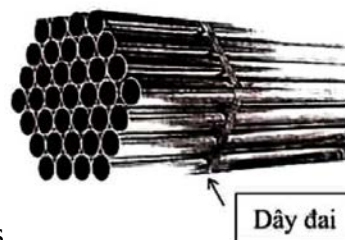
Câu 6. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, BH là đường cao kẻ từ B ($H \in AC$). Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC , F là điểm đối xứng của điểm H qua DE .

- Chứng minh rằng tứ giác $ABFH$ nội tiếp.
- Chứng minh $\widehat{FBA} = \widehat{EFH}$.
- Chứng minh rằng BF đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 7. (1,0 điểm)

Một nhà máy sản xuất ống thép khi xuất xưởng các ống thép được bó lại tạo thành khối gồm 37 ống như hình vẽ. Biết các ống có dạng hình trụ đường kính đáy bằng nhau và bằng 10 cm . Tính độ dài của một sợi dây đai để buộc các ống thép lại với nhau.



----- Hết -----

Số báo danh:.....; Phòng thi s

LƯỢT GIẢI ĐỀ TUYỂN SINH 10 AN GIANG**Môn: TOÁN CHUYÊN**

Năm học: 2023 – 2024

Đặng Lê Gia Khánh – Mai Anh Khoa

Câu 1. (1,0 điểm)

Thực hiện phép tính:

$$A = \frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{7} - 2\sqrt{2}.$$

Lời giải

$$A = \frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{7} - 2\sqrt{2}.$$

$$= \frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{14}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{(\sqrt{7}-2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{7}+1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{14}\sqrt{2}-2\sqrt{14}}{3-2\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{7}-6\sqrt{2}-2\sqrt{14}+8}{3-2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{9-6\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3(3-3\sqrt{2})}{3-3\sqrt{2}} = 3.$$

Câu 2. (1,0 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{3}y = 6 - 2\sqrt{3} \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x + \sqrt{3}y = 6 - 2\sqrt{3} & (1) \\ x + y = 2 & (2) \end{cases}$$

Trừ (1) và (2) theo vế ta được:

$$(\sqrt{3}-1)y = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2 \Rightarrow y = \sqrt{3}-1$$

Thay vào (2) được $x = 2 - y = 2 - (\sqrt{3}-1) = 3 - \sqrt{3}$.Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (3 - \sqrt{3}; \sqrt{3} - 1)$.

Câu 3. (1,5 điểm)

Phương trình $x^2 + ax + b = 0$ (với $a; b$ là các số nguyên) có một nghiệm là $5 + \sqrt{21}$. Tính nghiệm còn lại.

Lời giải

Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ (1).

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 = 5 + \sqrt{21}$ và x_2 là nghiệm còn lại.

Thay $x = x_1 = 5 + \sqrt{21}$ vào (1) ta được:

$$\begin{aligned}(5 + \sqrt{21})^2 + a(5 + \sqrt{21}) + b &= 0 \\ \Leftrightarrow 46 + 10\sqrt{21} + 5a + \sqrt{21}a + b &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + 10)\sqrt{21} + (5a + b + 46) &= 0\end{aligned}$$

Vì $a; b$ là các số nguyên nên ta có hệ:

$$\begin{cases} a + 10 = 0 \\ 5a + b + 46 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = -46 - 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 4 \end{cases}$$

Suy ra phương trình (1) là $x^2 - 10x + 4 = 0$.

Theo hệ thức Vi-ét, ta được:

$$x_1 + x_2 = 10 \Rightarrow (5 + \sqrt{21}) + x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 5 - \sqrt{21}.$$

Vậy nghiệm còn lại là $x = 5 - \sqrt{21}$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f(x) = ax^2$ và $g(x) = -ax + b$ ($a; b$ là các số thực), điểm chung thứ nhất có hoành độ bằng 1. Tìm hoành độ của điểm chung thứ hai của hai đồ thị

Lời giải

Hình vẽ cho biết $a > 0$.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$ax^2 = -ax + b \Leftrightarrow ax^2 + ax - b = 0 \quad (*).$$

Gọi nghiệm còn lại của (*) là x_0 . Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$1 + x_0 = -\frac{a}{a} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

Vậy hoành độ của điểm chung thứ hai là $x = -2$.

Câu 5. (1,5 điểm)

Cho $x^3 + y^3 = 189$ và $(x+y)(x+1)(y+1) = 270$. Tính $x+y$.

Lời giải

Ta có biến đổi:

$$x^3 + y^3 = 189 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 189$$

$$(x+y)(x+1)(y+1) = 270 \Leftrightarrow (x+y)(x+y+xy+1) = 270$$

Đặt $a = x+y; b = xy$, điều kiện bài toán trở thành:

$$\begin{cases} a^3 - 3ab = 189 \\ a(a+b+1) = 270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab = 189 \quad (1) \\ 3a^2 + 3ab + 3a = 810 \quad (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) theo vế, ta được:

$$a^3 + 3a^2 + 3a = 999 \Leftrightarrow (a+1)^3 = 1000 \Leftrightarrow a+1 = 10 \Leftrightarrow a = 9.$$

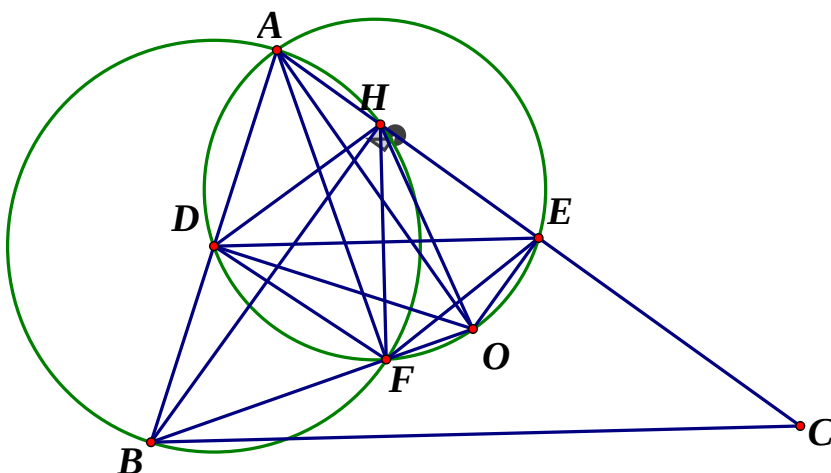
Vậy $a+y = a = 9$.

Câu 6, (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, BH là đường cao kẻ từ B ($H \in AC$). Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB và AC , F là điểm đối xứng của điểm H qua DE .

- Chứng minh rằng tứ giác $ABFH$ nội tiếp.
- Chứng minh $\widehat{FBA} = \widehat{EFH}$.
- Chứng minh rằng BF đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải



- a) Xét $\triangle AHB$ vuông cân tại H có D là trung điểm $AB \Rightarrow DA = DB = DH$ (1).

Vì F là điểm đối xứng của điểm H qua DE nên $DH = DF$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DA = DH = DB = DF$.

Suy ra bốn điểm A, H, B, F cùng thuộc đường tròn đường kính AB .

Vậy tứ giác $ABFH$ nội tiếp.

b) Tứ giác $ABFH$ nội tiếp (câu 6a) $\Rightarrow \widehat{FBA} = \widehat{FHE}$ (3).

Vì F là điểm đối xứng của điểm H qua DE nên $EH = EF$.

Suy ra $\triangle EHF$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{FHE} = \widehat{EFH}$ (4).

Từ (3), (4) $\Rightarrow \widehat{FBA} = \widehat{EFH}$.

c) Vì F là điểm đối xứng của điểm H qua DE nên

$$\widehat{FDE} = \frac{1}{2} \widehat{HDF} \quad (5)$$

Từ câu 6a, có A, H, B, F thuộc đường tròn tâm D đường kính AB nên

$$\widehat{HAF} = \frac{1}{2} \widehat{HDF} \quad (6).$$

Từ (5), (6) $\Rightarrow \widehat{FDE} = \widehat{HAF} = \widehat{EAF}$.

Suy ra tứ giác $FDAE$ nội tiếp. (7)

Xét đường tròn (O) tâm O ngoại tiếp $\triangle ABC$ có

D là trung điểm dây $AB \Rightarrow \widehat{ODA} = 90^\circ$

E là trung điểm dây $AC \Rightarrow \widehat{OEA} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ODAE$ có:

$$\widehat{ODA} + \widehat{OEA} = 180^\circ$$

Nên tứ giác $ODAE$ nội tiếp đường tròn đường kính AO . (8)

Kết hợp (7), (8) $\Rightarrow A, D, F, O, E$ cùng thuộc đường tròn đường kính AO .

$$\Rightarrow \widehat{AFO} = \widehat{ADO} = 90^\circ \text{ (cùng chắn cung } AO).$$

Mặt khác: $\widehat{AFB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB)

Suy ra: $\widehat{AFO} + \widehat{AFB} = 180^\circ$, nghĩa là B, F, O thẳng hàng.

Vậy BF đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Câu 7. (3,5 điểm)

Một nhà máy sản xuất ống thép khi xuất xưởng các ống thép được bó lại tạo thành khối gồm 37 ống như hình vẽ. Biết các ống có dạng hình trụ đường kính đáy bằng nhau và bằng 10 cm . Tính độ dài của một sợi dây đai để buộc các ống thép lại với nhau.

Lời giải

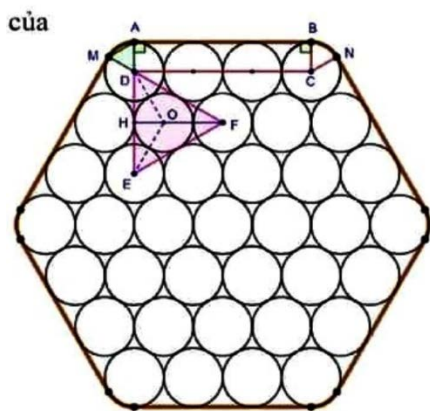
Đặt $d, r (cm)$ lần lượt là đường kính và bán kính của các ống thép

$$\Rightarrow d = 10cm; r = d / 2 = 5cm.$$

Ký hiệu các điểm như hình minh họa bên.

Trong đó:

A, B, M, N, H là các tiếp điểm giữa dây đai với các ống thép.



HÌNH VẼ

D, C, E, F, O là tâm của một số ống thép.

Giả sử các ống thép tiếp xúc khít nhau và dây đai buộc chính xác.

Dễ thấy ABCD là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow AB = CD = 3d = 3.10 = 30(cm) \quad (1)$$

Nên hiển nhiên các điểm A, D, H, E thẳng hàng.

Xét $\triangle DEF$ có:

$$DE = 2DH = 2\sqrt{OD^2 - OH^2} = 2\sqrt{(2r)^2 - r^2} = 2\sqrt{3}r = 10\sqrt{3}(cm)$$

Tương tự cũng tính được $DF = 10\sqrt{3}(cm)$ và $EF = 10\sqrt{3}(cm)$.

Như vậy $DE = EF = DF = 10\sqrt{3}(cm)$ nên $\triangle DEF$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{EDF} = 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{ADM} = \widehat{EDF} = 60^\circ$ (đối đỉnh).

Chiều dài cung AM bằng

$$\frac{\pi \cdot 5 \cdot 60}{180} = \frac{5}{3}\pi (cm) \quad (2)$$

Từ hình vẽ, kết hợp (1) và (2) ta tính được chiều dài dây đai là:

$$l = 6 \cdot \frac{5}{3}\pi + 6 \cdot 30 = 180 + 10\pi (cm).$$

----- Hết -----