

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH YÊN BÁI
ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Để thi gồm có 01 trang, 05 gồm câu)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS
NĂM HỌC 2024-2025
Môn thi: **TOÁN**
Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: **06/6/2024**

Câu 1. (4,0 điểm)

- Cho $x = \sqrt{6-4\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^3 - x^2 + x - 1$
- Cho đa thức $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ với a, b là các số thực. Biết rằng $f(x)$ có một nghiệm là 2 và khi chia $f(x)$ cho $x - 3$ thì dư 2. Tìm các giá trị của a, b .

Câu 2. (4,0 điểm)

- Giải phương trình $(3x+1)\sqrt{x^2+3} = 3x^2 + 2x + 3$
- Cho đường thẳng $(d): y = (m^2 - 5m + 8)x - m + 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B sao cho $OB = 4OA$

Câu 3. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Các đường thẳng BE, CF lần lượt cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là P, Q (P khác B, Q khác C). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt đường thẳng EF lần lượt tại M, N .

- Chứng minh rằng $AEHF$ là một tứ giác nội tiếp và $AH = AP = AQ$.
- Chứng minh rằng tam giác NEC cân tại N .
- Giả sử NP cắt đường tròn (O) tại K . Chứng minh $NE^2 = NK.NP$ và ba điểm M, Q, K thẳng hàng.

Câu 4. (3 điểm)

- Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$
- Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố (p, q, r) thỏa mãn $pq = r + 1$ và $2(p^2 + q^2) = r^2 + 1$

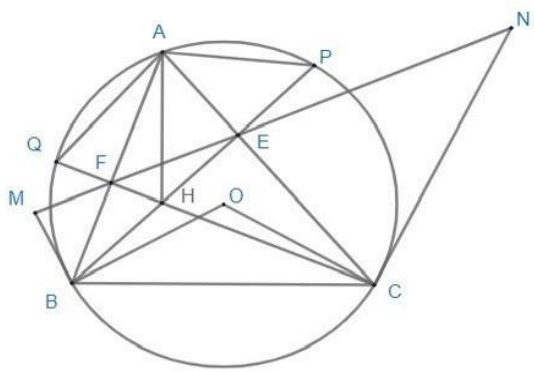
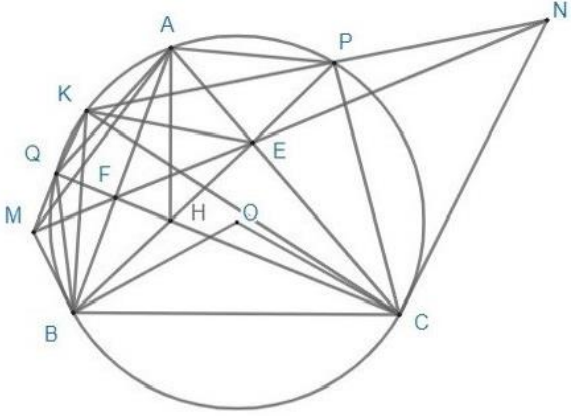
Câu 5. (3 điểm)

- Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - xy + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 - yz + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 - zx + x^2}} \leq 3$$
- Trên một khu rừng đủ rộng người ta trồng nhiều cây quế con, xem các gốc cây quế là các điểm (đường kính gốc cây không đáng kể). Người ta trồng cây sao cho các tam giác có đỉnh là các điểm tạo bởi gốc cây quế đều có diện tích không quá $500m^2$. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có diện tích không quá $2024 m^2$ chứa tất cả các cây quế này.

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN LỜI GIẢI

Câu		Nội dung	Điểm
1	1.	Ta có: $x = \sqrt{6-4\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = (2-\sqrt{2}) - (3-\sqrt{2}) = -1$ Thay $x = -1$ vào biểu thức A, ta được: $A = x^3 - x^2 + x - 1 = (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) - 1 = -4$	2,0
	2.	+) $f(x)$ có một nghiệm là 2 $\Rightarrow f(2) = 0$ $\Leftrightarrow 2^3 - 2.2^2 + a.2 + b = 0$ $\Leftrightarrow 2a + b = 0 \quad (1)$ +) Khi chia $f(x)$ cho $x - 3$ thì dư 2 $\forall x$ $\Rightarrow x^3 - 2x^2 + ax + b$ chia cho $x - 3$ thì dư 2 $\forall x$ $\Leftrightarrow (x-3)(x^2 + x + a + 3) + (3a + b + 9)$ cho $x - 3$ thì dư 2 $\forall x$ $\Rightarrow 3a + b + 9 = 2 \quad (2)$ Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a + b + 9 = 2 \end{cases}$ Giải hệ phương trình, ta có giá trị cần tìm là $(a, b) = (-7; 14)$	2,0
	2	$(3x+1)\sqrt{x^2+3} = 3x^2 + 2x + 3 \quad (*)$ $\Leftrightarrow (3x+1)(\sqrt{x^2+3} - 2x) = -3x^2 + 3$ Giả sử: $\sqrt{x^2+3} + 2x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = -2x$ $\Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 + 3 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x^2 = 3 \end{cases}$ $\Rightarrow x = -1$ Thay $x = -1$ vào (*), ta thấy phương trình vô nghiệm $\Rightarrow \sqrt{x^2+3} + 2x \neq 0; x \neq -1$ $\Rightarrow (3x+1) \frac{-3x^2+3}{\sqrt{x^2+3}+2x} = -3x^2+3$ $\Rightarrow \begin{cases} -3x^2+3=0 \\ \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3}+2x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x+1=\sqrt{x^2+3} \end{cases}$ Giải phương trình 2: $\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x+1)^2 = x^2+3 \end{cases} \Rightarrow x=1$ Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$	2,0
	2.	Cho $A(x_A; y_A) \Rightarrow y_A = 0$ Thay $y_A = 0$ vào (d) $\Rightarrow x_A = \frac{m-2}{m^2-5m+8} \quad (m^2-5m+8 > 0)$ $\Rightarrow OA = \left \frac{m-2}{m^2-5m+8} \right = \frac{ m-2 }{m^2-5m+8}$	2,0

	Cho $B(x_B; y_B) \Rightarrow x_B = 0$. Thay $y_B = -m + 2$ vào (d) $\Rightarrow y_B = -m + 2$ $\Rightarrow OB = -m + 2 = 2 - m$ Để đường thẳng (d) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B $\Leftrightarrow m \neq 2$ Ta có $OB = 4OA \Leftrightarrow -(m - 2) = 4 \left \frac{m - 2}{m^2 - 5m + 8} \right$ $\Leftrightarrow m - 2 = \frac{4 m - 2 }{m^2 - 5m + 8} \Leftrightarrow m - 2 (m^2 - 5m + 8) = 4 m - 2$ $\Leftrightarrow m - 2 (m^2 - 5m + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \\ m^2 - 5m + 4 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(L) \\ m = 4(T/m) \\ m = 1(T/m) \end{cases}$ Vậy $m = 1$ hoặc $m = 4$.	
3	a, BE, CF là hai đường cao của $\triangle ABC$ $\Rightarrow AEH = AFH = 90^\circ$ $\Rightarrow$ tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH $\Rightarrow AHF = AEF$ (cùng chắn AF) Xét tứ giác BFEC có $BFC = BEC = 90^\circ$ $\Rightarrow BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow AEF = ABC$ (góc ngoài đỉnh đối) Mà $NEC = AEF$ $\Rightarrow ABC = AQC$ (cùng chắn AC) $\Rightarrow AHF = AQC \Rightarrow \triangle AQH$ cân tại H $\Rightarrow AH = AQ$ Tương tự chứng minh $AH = AP$ $\Rightarrow AH = AP = AQ$	 2,0
	b. $NEC = AEF$ (đối đỉnh) mà $AEF = ABC$ (từ câu a) $ABC = ACN$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp chắn cung) $\Rightarrow NEC = ACN$ $\Rightarrow \triangle NEC$ cân tại N	2,0
	c. $NCP = NKC$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp chắn cung) $\Rightarrow \triangle NCP \sim \triangle NKC$ (g.g) $\Rightarrow NC^2 = NK.NP$ mà $NE = NC$ (câu b) $\Rightarrow NE^2 = NK.NP \Rightarrow \frac{NE}{NP} = \frac{NK}{NE}$ $\Rightarrow \triangle NEP \sim \triangle NKE$ (c.g.c) $\Rightarrow NPE = NEK$ $\Rightarrow KEF = KPE = KPB = KAB = KAF$ $\Rightarrow AKFE$ nội tiếp $K \in (AEF)$ (1) Gọi L là giao điểm của MQ và (O) Tương tự câu b chứng minh được $MB = MF$ Tương tự ý trên chứng minh được $MB^2 = MQ.ML$	 2,0

		$\Rightarrow MF^2 = MQ.ML \Rightarrow \frac{MF}{MQ} = \frac{ML}{MF} \Rightarrow \Delta MQF \sim \Delta MFL \text{ (c.g.c)}$ $\Rightarrow MQF = MFL \Rightarrow LQC = LQF = LFE$ Mà $LQC + LAC = 180^\circ \Rightarrow LFE + LAE = 180^\circ \Rightarrow ALFE$ nội tiếp $\Rightarrow L \in (AEF)$ (2) Từ (1) và (2) có $K, L \in (AEF)$ và (ABC) $\Rightarrow K \equiv L \Rightarrow M, Q, K \text{ thẳng hàng}$	
4	1.	+) Xét $x \geq 1$ thì: $x^6 + 3x^3 + 1 > x^6 + 2x^3 + 1 = (x^3 + 1)^2$ $\text{Và } x^6 + 3x^3 + 1 < x^6 + 4x^3 + 4 = (x^3 + 2)^2$ $\Rightarrow (x^3 + 1)^2 < y^4 = x^6 + 3x^3 + 1 < (x^3 + 2)^2$ $\Rightarrow y^4 \text{ nằm giữa 2 số chính phương liên tiếp}$ $\Rightarrow \text{pt đã cho vô nghiệm với } x \geq 1$ +) Xét $x = 0$: tính được $y = \pm 1 \Rightarrow$ pt có 2 nghiệm $(0; -1)$ và $(0; 1)$ +) Xét $x = -1$: $y^4 = -1$ (vô nghiệm) Xét $x \leq -2$: để dễ nhìn đặt $z = -x \Rightarrow z \geq 2$ Pt trở thành: $y^4 = z^6 - 3z^3 + 1$ Ta thấy: $z^6 - 3z^3 + 1 < z^6 - 2z^3 + 1$ (vì $z \geq 2$) $\Rightarrow z^6 - 3z^3 + 1 < (z^3 - 1)^2$ Và $(z^6 - 3z^3 + 1) - (z^6 - 4z^3 + 4) = z^3 - 3 > 0$ (do $z^3 \geq 8$) $\Rightarrow z^6 - 3z^3 + 1 > z^6 - 4z^3 + 4 = (z^3 - 2)^2$ Do đó: $(z^3 - 2)^2 < y^4 = z^6 - 3z^3 + 1 < (z^3 - 1)^2$ $\Rightarrow y^4 \text{ nằm giữa 2 số chính phương liên tiếp}$ $\Rightarrow \text{pt đã cho vô nghiệm với } x \leq -2$ Kết luận pt đã cho có 2 nghiệm là $(0; -1)$ và $(0; 1)$	2,0
	2.	Đặt $\begin{cases} S = p + q \\ P = pq \end{cases}$, ta có hệ: $\begin{cases} P = r + 1 \\ 2(S^2 - 2P) = r^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = r + 1 \\ S^2 = \frac{r^2 + 4r + 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = r + 1 \\ S = \sqrt{\frac{r^2 + 4r + 5}{2}} \end{cases}$ Vì p, q, r là ba số nguyên tố nên ta có: $\begin{cases} r = 5 \\ S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ p + q = 5 \\ pq = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ q = 5 - p \\ p(5 - p) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ q = 5 - p \\ p^2 - 5p + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ p = 2 \text{ hoặc } p = 3 \\ q = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} r = 5 \\ p = 3 \\ q = 2 \end{cases}$	1,0
5	1)	Ta chứng minh bất đẳng thức $x^2 - xy + y^2 \geq \frac{1}{4}(x + y)^2$ $\Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + 4y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2$ $\Leftrightarrow 3x^2 - 6xy + 3y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x + y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y > 0$	2,0

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - xy + y^2} \geq \frac{1}{2}(x + y) = \frac{x + y}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 - xy + y^2}} \leq \frac{2}{x + y}$$

Chứng minh tương tự, ta được

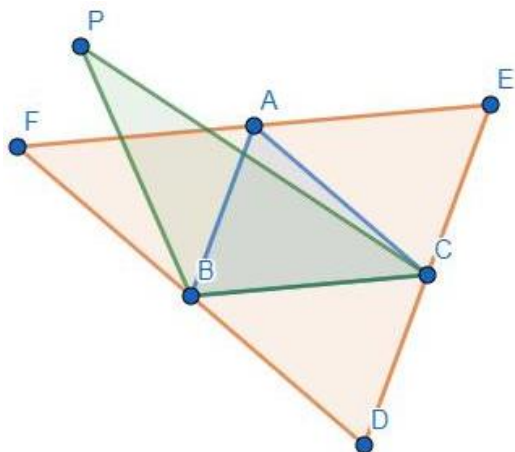
$$\frac{1}{\sqrt{y^2 - yz + z^2}} \leq \frac{2}{y + z} \text{ và } \frac{1}{\sqrt{z^2 - zx + x^2}} \leq \frac{2}{z + x}$$

Ta có về trái

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2 - xy + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 - yz + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 - zx + x^2}} &\leq 2 \left(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{y + z} + \frac{1}{z + x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{x + y} + \frac{4}{y + z} + \frac{4}{z + x} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y} \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) \right] = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - xy + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 - yz + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 - zx + x^2}} \leq 3 \text{ khi } x = y = z = 3 (\text{đpcm})$$



2)

- Do số tam giác được lập từ n điểm (n góc cây quế) đã cho là hữu hạn nên tồn tại 1 tam giác ABC có diện tích lớn nhất. Dựng tam giác DEF sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm EF, DF, DE. Khi đó vì

$$S_{ABC} \leq 500 \Rightarrow S_{DEF} \leq 500 \cdot 4 = 2000.$$

Ta chứng minh DEF là tam giác chứa tất cả cây quế.

- Thật vậy, giả sử tồn tại P trong số n nằm ngoài tam giác DEF. Không mất tính tổng

quát, giả sử P nằm khác phía BC đối với EF. Khi đó khoảng cách từ P đến BC sẽ lớn hơn khoảng cách từ A đến BC, dẫn đến $S_{PBC} > S_{ABC}$ điều này mâu thuẫn với giả thuyết vì ta đã giả sử tam giác ABC là tam giác có diện tích lớn nhất trong số các tam giác tạo thành từ n điểm đã cho

$\Rightarrow$ Vậy với ABC là tam giác có diện tích lớn nhất tạo bởi 3 điểm bất kì, không vượt quá $500m^2$, tồn tại tam giác không vượt quá 2024 (không vượt quá 2000) chứa tất cả các điểm n

Vậy ta có đpcm.

1,0

-----HẾT-----