

Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (4 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

b) Cho a, b, c là các số thực sao cho $a+b+c=2$ và $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}$.

Câu 2. (4 điểm)

a) Cho n là số nguyên dương và $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 2. Chứng minh rằng $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 8.

b) Xác định tất cả các cặp số $(a; b)$ với a, b nguyên dương sao cho phương trình $ax^2 - bx + 2a + 3 = 0$ (với x là ẩn số) có hai nghiệm dương phân biệt.

Câu 3. (4 điểm)

a) Chứng tỏ rằng không tồn tại cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^3 + 1 = 4y^2$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$. Chứng minh rằng

$$a+b+c \geq 3 \text{ và } \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{c+1} + \frac{c^2}{a+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Một tập hợp A chỉ chứa các phần tử thuộc X được gọi là “tập tốt” nếu **không** tồn tại hai phần tử a, b thuộc A sao cho $a < b$ chia hết cho a .

a) Hãy tìm một “tập tốt” có đúng 10 phần tử.

b) Gọi A là một “tập tốt” bất kỳ có đúng 10 phần tử. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m lẻ và $m < 20$, luôn tồn tại a thuộc A sao cho a chia hết cho m .

Câu 5. (6 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , có đường cao AD và trung tuyến AM . Kẻ đường kính AE , tia EM cắt AD tại H và cắt (O) tại F ($F \neq E$).

a) Chứng minh M là trung điểm EH và $BC^2 = 4ME.MF$.

b) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác FBH .

c) Chứng minh tứ giác $AFDM$ nội tiếp và $BDF = MAC$.

-----**HẾT**-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

Chữ kí cán bộ coi thi 1:.....; Chữ kí cán bộ coi thi 2:.....

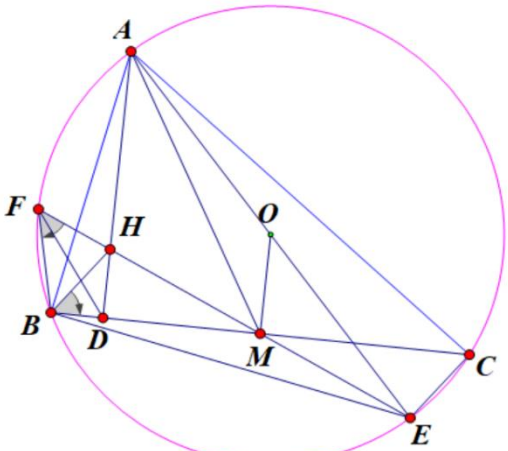
Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian phát đề

HƯỚNG DẪN CHẤM – ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

(Nội dung có 4 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1		4đ
a)	Rút gọn biểu thức $P = \frac{2x+1}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$	2đ
	Ta có $P = \frac{2x+1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$.	0.5đ
	Hay $P = \frac{2x+1+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{2x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$.	1đ
	Vậy $P = \frac{2\sqrt{x}+1}{(x+\sqrt{x}+1)}$.	0.5đ
b)	b) Cho a, b, c là các số thực sao cho $a+b+c=2$ và $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Tính giá trị biểu thức $Q = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}$.	2đ
	Do $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ nên $\frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 = 4$	0.5đ
	Hay $(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) = 4$.	1đ
	Mà $(a+b+c) = 2$ suy ra $Q = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = 2$.	0.5đ
Câu 2		4đ
a)	Cho n là số nguyên dương và $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 2. Chứng minh rằng $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 8.	2đ
	Do $3^{n+1} - n^2$ chia hết cho 2 nên n là số lẻ.	0.5đ
	Khi đó $n^2 \equiv 1(\text{mod } 8)$ và $3^{n+1} \equiv 1(\text{mod } 8)$ (do $n+1$ là số chẵn)	1đ
	Vậy $3^{n+1} - n^2 \equiv 0(\text{mod } 8)$.	0.5đ
b)	b) Xác định tất cả các cặp số $(a; b)$ với a, b nguyên dương sao cho phương trình $ax^2 - bx + 2a + 3 = 0$ (với x là ẩn số) có hai nghiệm dương phân biệt.	2đ
	Từ giả thiết suy ra $P = \frac{2a+3}{a} \in \mathbb{Z}$ hay a là ước nguyên dương	0.5đ

	của 3.	
	Nếu $a=1$ khi đó $P=3=1.3$ suy ra $b=12$.	0.75đ
Câu 3		4đ
a)	Chứng tỏ rằng không tồn tại cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $x^3+1=4y^2$.	2đ
	Từ giả thiết suy ra $x^3=(2y-1)(2y+1)$	0.5đ
	Do $2y-1$ và $2y+1$ là hai số lẻ liên tiếp nên nguyên tố cùng nhau.	0.25đ
	Hay tồn tại $a,b \in \mathbb{N}^*$ và $b>a$ sao cho $\begin{cases} 2y-1=a^3 \\ 2y+1=b^3 \end{cases}$	0.5đ
	Suy ra $b^3-a^3=2$ hay $(b-a)(b^2+ab+a^2)=2$.	0.25đ
	Mà $b^2+ab+a^2>3$ nên $b-a \notin \mathbb{N}$, vô lí. Hay ta có điều phải chứng minh	0.5 đ
b)	Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3abc$. Chứng minh rằng $a+b+c \geq 3$ và $\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{c+1} + \frac{c^2}{a+1} \geq \frac{3}{2}$.	2đ
	Ta có $3abc = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt{a^2b^2c^2}$, suy ra $abc \geq 1$.	0.5đ
	Mà $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ nên $a+b+c \geq 3$.	0.5đ
	Ta có $\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{c+1} + \frac{c^2}{a+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3}$.	0.5đ
	Do $a+b+c \geq 3$ nên $\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3} \geq \frac{3(a+b+c)}{a+b+c+3} \geq \frac{3}{2}$. Vậy $\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{c+1} + \frac{c^2}{a+1} \geq \frac{3}{2}$.	0.5đ
	Cho tập hợp $X = \{1;2;3;...;20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Một tập hợp A chỉ chứa các phần tử thuộc X được gọi là “tập tốt” nếu không tồn tại hai phần tử a,b thuộc A sao cho $a < b$ chia hết cho a . Với	2đ
a)	Hãy tìm một “tập tốt” có đúng 10 phần tử.	1đ
	Một tập tốt có đúng 10 phần tử là: $\{11;12;...;20\}$.	1đ
b)	Gọi A là một “tập tốt” bất kỳ có đúng 10 phần tử. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m lẻ và $m < 20$, luôn tồn tại a thuộc A sao cho a chia hết cho m .	1đ
	Xét a_i với $i = \overline{1,10}$ là 10 phần tử thuộc A , khi đó a_i luôn biểu diễn dưới dạng $a_i = 2^{S_i}.m_i$ với $S_i \in \mathbb{N}$ và m_i lẻ.	0.5đ

	Do $a_i \in X$ nên $m_i \in T = \{1; 3; 5; \dots; 19\}$, tập T này có đúng 10 phần tử.	0.25đ
	Do A là tập tốt nên các số m_i là đôi một khác nhau, tức là với mọi m lẻ và $m < 20$ luôn tồn tại $m_i = m$. Hay a_i chia hết cho m .	0.25đ
Câu 5	Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , có đường cao AD và trung tuyến AM . Kẻ đường kính AE , tia EM cắt AD tại H và cắt (O) tại F ($F \neq E$).	
a)	Chứng minh M là trung điểm EH và $BC^2 = 4ME.MF$	6đ
	Ta có $OM \parallel AH$ mà O là trung điểm AE nên M là trung điểm HE. Mà $FBEC$ nội tiếp nên $ME.MF = MC.MB$ Hay $BC^2 = 4ME.MF$. 	1đ 1đ
b)	Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác FBH .	2đ
	Ta có M là trung điểm EH và $ME.MF = MC.MB$.	0.5đ
	Nên $MB^2 = MH.MF$	0.5đ
	Suy ra $\triangle MHB$ đồng dạng $\triangle MBF$ hay $MBH = MFB$.	0.5đ
	Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác FBH .	0.5đ
c)	Chứng minh tứ giác $AFDM$ nội tiếp và $BDF = MAC$.	2đ
	Ta có tâm giác AFM vuông tại F nên tứ giác $AFDM$ nội tiếp.	0.5đ
	Suy ra $AFD = AMC$.	0.5đ
	Mà tứ giác $AFBC$ nội tiếp nên $AFB + ACM = 180^\circ$.	0.5đ
	Hay $AMC + DFB + ACM = 180^\circ$.	0.25đ
	Vậy $BFD = MAC$.	0.25đ

Chú ý:

- Học sinh làm cách khác với đáp án nhưng kết quả đúng thì vẫn đạt điểm tối đa.

- Điểm toàn bài chấm điểm lẻ đến 0,25.

-----HẾT-----