

Bài 1. a) Cho $x = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = (x^3 - 1)^2 - 9(x + 1)^4 + 2024$.

b) Cho ba số x, y, z thỏa mãn
$$\begin{cases} x + y + z = 2024 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2024} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $(x^{2021} + y^{2021})(x^{2023} + y^{2023})(x^{2025} + y^{2025}) = 0$

Bài 2. a) Một tổ có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Cô giáo chọn ngẫu nhiên 2 bạn trong tổ đó tham gia một sự kiện. Tính xác suất để 2 bạn được chọn có cùng giới tính.

b) Trên quãng đường AB, một xe máy xuất phát đi từ A đến B, cùng lúc đó một xe ô tô xuất phát đi từ B đến A, sau 1 giờ 20 phút hai xe gặp nhau và tiếp tục đi thì xe ô tô đến A sớm hơn xe máy đến B là 2 giờ. Tính thời gian mỗi xe đi hết quãng đường AB.

Bài 3. a) Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} < \sqrt{6}$

Bài 4. a) Chứng minh rằng $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3$ chia hết cho 5050.

b) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 90 = 0$.

c) Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3x_1x_2 + 4}{(x_1 - x_2)^2}$.

Bài 5. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ tiếp xúc trong tại M với $R > r$. Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) sao cho điểm A và điểm M nằm về 2 nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng DC. Và các cạnh AD và BC lần lượt tiếp xúc với đường tròn (O') tại H và G. Vẽ đường thẳng xy là tiếp tuyến chung tại M của hai đường tròn (O) và (O') sao cho tia Mx nằm trên mặt phẳng chứa điểm D với bờ là đường thẳng MA. Đường thẳng MH cắt đường tròn (O) tại E (E khác M).

a) Chứng minh rằng ME là tia phân giác của $\widehat{AMD}$.

b) Gọi I là giao điểm của CE và HG. Chứng minh rằng $\widehat{MHG} = \widehat{MIC}$ và $EI^2 = EH \cdot EM$.

c) Chứng minh rằng AI là tia phân giác của $\widehat{DAC}$.