

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (6,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 + 2(2 + \sqrt{x-1}) = 5x$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 5 + 2xy + 2x - 2y \\ 2x^2 + y^2 = 10 + 2x - 3y \end{cases}$$

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x^3 = 1993 \cdot 3^y + 2021$.

b) Tìm số nguyên dương n để $\frac{n-23}{n+89}$ là bình phương của một số hữu tỉ dương.

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \leq 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} - \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}} \right).$$

Câu 4. (7,0 điểm)

Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O . Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC . Tia MH cắt đường tròn (O) tại K , đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại E (E khác A).

a) Chứng minh tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA \cdot HD = HK \cdot HM$.

b) Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J . Chứng minh các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua một điểm.

c) Một trường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của PQ . Chứng minh rằng AN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho 676 số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai số trong các số đã cho mà hiệu của chúng chia hết cho 2022.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (6,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 + 2(2 + \sqrt{x-1}) = 5x$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 5 + 2xy + 2x - 2y \\ 2x^2 + y^2 = 10 + 2x - 3y \end{cases}$$
.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq 1$. Phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 + 2\sqrt{x-1} &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) + 2\sqrt{x-1} = 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \left[(x-4)\sqrt{x-1} + 2 \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \left[\sqrt{(x-1)^3} - 3\sqrt{x-1} + 2 \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} (\sqrt{x-1} - 1)^2 (\sqrt{x-1} + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1, x = 2$.

b) Lấy phương trình thứ nhất nhân 2 rồi trừ cho phương trình thứ hai về theo về ta được:

$$\begin{aligned} 2(3x^2 + y^2) - (2x^2 + y^2) &= 2(5 + 2xy + 2x - 2y) - (10 + 2x - 3y) \\ \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 &= 4xy + 2x - y \Leftrightarrow (2x - y)^2 = 2x - y \\ \Leftrightarrow (2x - y)(2x - y - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 2x - 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Thay $y = 2x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2x^2 + 4x^2 = 10 + 2x - 6x \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = -2$.

Với $x = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{10}{3}$.

Thay $y = 2x - 1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2x^2 + (2x-1)^2 = 10 + 2x - 3(2x-1) \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Với $x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2} - 1$.

Với $x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = -2\sqrt{2} - 1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; -2), \left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right); (\sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 1), (-\sqrt{2}; -2\sqrt{2} - 1)$.

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x^3 = 1993 \cdot 3^y + 2021$.

b) Tìm số nguyên dương n để $\frac{n-23}{n+89}$ là bình phương của một số hữu tỉ dương.

Lời giải

a) Nếu $y = 1 \Rightarrow x^3 = 1993 \cdot 3 + 2021 = 8000 \Leftrightarrow x = 20$.

Nếu $y > 1$, ta có: $1993 \cdot 3^y \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow x^3 - 2021 \equiv 0 \pmod{9} \Leftrightarrow x^3 \equiv 5 \pmod{9}$.

Nhưng lập phương của một số tự nhiên chia 9 chỉ có thể dư là 0; 1; 8 nên dẫn đến điều vô lí.

Vậy $(x; y) = (20; 1)$ là cặp số cần tìm.

b) Ta có: $\frac{n-23}{n+89} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\gcd(a; b) = 1$.

$$\frac{n-23}{n+89} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow b^2(n-23) = a^2(n+89) \Rightarrow n(a^2 - b^2) + 89a^2 + 23b^2 = 0.$$

$$\Rightarrow n = \frac{89a^2 + 23b^2}{b^2 - a^2} = -89 + \frac{112b^2}{b^2 - a^2}.$$

Vì $\gcd(a; b) = 1 \Rightarrow \gcd(b^2; b^2 - a^2) = 1 \Rightarrow 112$ chia hết cho $b^2 - a^2$.

Khi đó ta có: $k(b^2 - a^2) = 112$.

$$\text{Nếu } k = 1 \Rightarrow b^2 - a^2 = 112 \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 2^p \cdot 7^q \\ b + a = 2^{4-p} \cdot 7^{1-q} \end{cases} \Rightarrow b = 2^{p-1} \cdot 7^q + 2^{3-p} \cdot 7^{1-q}.$$

- $(p; q) = (1; 0) \Rightarrow b = 1 + 2^2 \cdot 7 = 29 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - 112} = 27$. Với $(a; b) = (27; 29) \Rightarrow n = 752$.
- $(p; q) = (1; 1) \Rightarrow b = 7 + 2^2 = 11 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - 112} = 3$. Với $(a; b) = (3; 11) \Rightarrow n = 32$.
- $(p; q) = (2; 1) \Rightarrow b = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - 112} = 12$. Loại do $\gcd(a; b) = 1$.

Xét các cặp $(p; q) = (2; 0); (3; 1); (3; 0)$ tương tự thì trong các trường hợp tương tự đều cho kết quả không thỏa mãn hoặc $n = 32, n = 752$.

$$\text{Nếu } k = 2 \Rightarrow b^2 - a^2 = 56 \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 2^p \cdot 7^q \\ b + a = 2^{3-p} \cdot 7^{1-q} \end{cases} \Rightarrow b = 2^{p-1} \cdot 7^q + 2^{2-p} \cdot 7^{1-q}.$$

- $(p; q) = (1; 0) \Rightarrow b = 1 + 2 \cdot 7 = 15 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - 56} = 13$. Với $(a; b) = (13; 15) \Rightarrow n = 361$.
- $(p; q) = (1; 1) \Rightarrow b = 7 + 2 = 9 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - 56} = 5$. Với $(a; b) = (5; 9) \Rightarrow n = 73$.

$$\text{Nếu } k = 4 \Rightarrow b^2 - a^2 = 28 \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 2^p \cdot 7^q \\ b + a = 2^{2-p} \cdot 7^{1-q} \end{cases} \Rightarrow b = 2^{p-1} \cdot 7^q + 2^{1-p} \cdot 7^{1-q} = 8.$$

- $\Rightarrow a = \sqrt{b^2 - 28} = 6$. Với $(a; b) = (6; 8) \Rightarrow$ Loại do $\gcd(a; b) = 1$.

$$\text{Nếu } k = 7 \Rightarrow b^2 - a^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 2^p \\ b + a = 2^{4-p} \end{cases} \Rightarrow b = 2^{p-1} + 2^{3-p}.$$

- $p = 1 \Rightarrow b = 1 + 4 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - 16} = 3$. Với $(a; b) = (3; 5) \Rightarrow n = 86$.
- $p = 2 \Rightarrow b = 2 + 2 = 4 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$ loại.

$$\text{Nếu } k = 8 \Rightarrow b^2 - a^2 = 14 \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 2^p \cdot 7^q \\ b + a = 2^{1-p} \cdot 7^{1-q} \end{cases} \Rightarrow 2b = 2^{p-1} \cdot 7^q + 2^{1-p} \cdot 7^{1-q} \Rightarrow b = 4.$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{b^2 - 14} = \sqrt{2} \Rightarrow \text{loại}.$$

$$\text{Nếu } k = 14 \Rightarrow b^2 - a^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 2^p \\ b + a = 2^{3-p} \end{cases} \Rightarrow b = 2^{p-1} + 2^{2-p} \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - 8} = 1.$$

$$\text{Với } (a; b) = (1; 3) \Rightarrow n = 37.$$

$$\text{Nếu } k = 16 \Rightarrow b^2 - a^2 = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 7^q \\ b + a = 7^{1-q} \end{cases} \Rightarrow 2b = 7^q + 7^{1-q} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - 7} = 3.$$

$$\text{Với } (a; b) = (3; 4) \Rightarrow n = 167.$$

$$\text{Nếu } k = 28 \Rightarrow b^2 - a^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 2^p \\ b + a = 2^{2-p} \end{cases} \Rightarrow b = 2^{p-1} + 2^{1-p} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \text{loại}.$$

$$\text{Nếu } k = 56 \Rightarrow b^2 - a^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 2^p \\ b + a = 2^{1-p} \end{cases} \Rightarrow b = 2^{p-1} + 2^{-p} \Rightarrow \text{loại}.$$

$$\text{Nếu } k = 112 \Rightarrow b^2 - a^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{loại}.$$

Vậy $n \in \{32; 37; 73; 86; 167; 361; 752\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \leq 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} - \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}} \right).$$

Lời giải

Với mọi a, b dương ta có: $2(a - \sqrt{ab} + b)^2 \geq a^2 + b^2$. Thật vậy, bất đẳng cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned} & 2(a^2 + b^2 + ab) + 4ab - 4a\sqrt{ab} - 4b\sqrt{ab} \geq a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow & a^2 + b^2 + 6ab - 4\sqrt{ab}(a+b) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a+b)^2 - 4\sqrt{ab}(a+b) + 4ab \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a+b-2\sqrt{ab})^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{a}-\sqrt{b})^4 \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng, suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} & - \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2a+2b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2b+2c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2c+2a}} \right) \geq - \frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a+b}} - \frac{b-\sqrt{bc}+c}{\sqrt{b+c}} - \frac{c-\sqrt{ca}+a}{\sqrt{c+a}} \\ & = -\sqrt{a+b} + \sqrt{\frac{ab}{a+b}} - \sqrt{b+c} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}} - \sqrt{c+a} + \sqrt{\frac{ca}{c+a}}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } P \geq \sqrt{\frac{ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{ca}{c+a}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}}.$$

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, ta có: $ab + bc + ca \leq 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 \Rightarrow x + y + z \leq 3$.

Khi đó:

$$\begin{aligned} P & \geq \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{z+x}} \geq \frac{9}{\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}} \geq \frac{9}{\sqrt{3(x+y+y+z+z+x)}} \\ & = \frac{9}{\sqrt{6(x+y+z)}} \geq \frac{9}{\sqrt{6 \cdot 3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ đạt được khi $a = b = c = 1$.

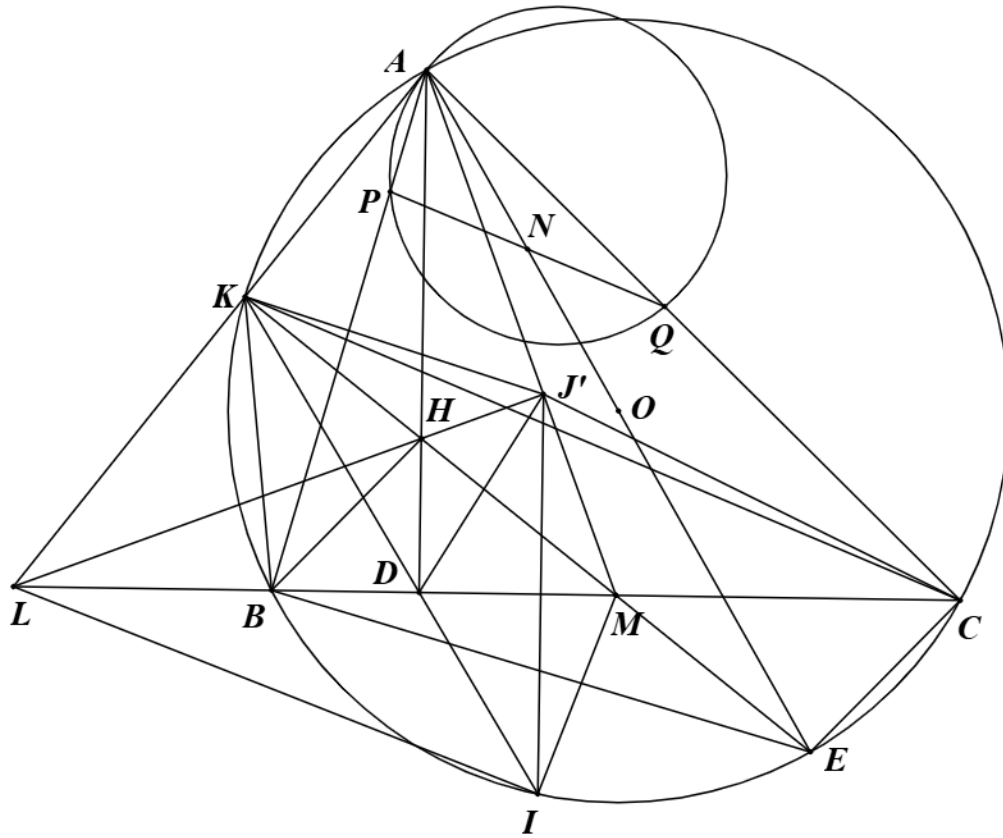
Câu 4. (7,0 điểm)

Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O . Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm của tam giác ABC . Tia MH cắt đường tròn (O) tại K , đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại E (E khác A).

a) Chứng minh tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA \cdot HD = HK \cdot HM$.

b) Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J . Chứng minh các đường thẳng AK , BC và HJ cùng đi qua một điểm.

c) Một trường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại P , Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của PQ . Chứng minh rằng AN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

a) Ta có AE là đường kính của đường tròn (O) nên $EB \perp AB$.

Mà $CH \perp AB \Rightarrow EB \parallel CH$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $EC \parallel HB$.

Suy ra tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.

Ta có: $\triangle HKA \sim \triangle HDM \Rightarrow \frac{HA}{HM} = \frac{HK}{HD} \Rightarrow HA \cdot HD = HK \cdot HM$.

b) Gọi L là giao điểm của AK và BC . Ta có: $MH \perp AL, AH \perp LM \Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ALM .

Gọi J' là giao điểm của LH và AM , tứ giác $HJ'MD, HJ'AK$ nội tiếp.

Mặt khác ta có: $\angle MDI = \angle KDL = \angle KLH = \angle HMJ' = \angle HDJ'$.

Suy ra $\triangle IDJ'$ cân tại $D \Rightarrow DJ' = DI$ (1)

Ta có: $LK \cdot LA = LH \cdot LJ' = LB \cdot LC \Rightarrow BHJ'C$ nội tiếp.

Hay J' là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC và đường thẳng AM .

Theo bổ đề quen thuộc thì đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC đối xứng với đường tròn (O) qua BC .

Do đó qua J' kẻ đường vuông góc với BC cắt đường tròn (O) tại $I' \Rightarrow DJ' = DI'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I \equiv I'$. Do đó IJ' vuông góc với $BC \Rightarrow J \equiv J'$.

Từ đó suy ra AK, BC và HJ cùng đi qua điểm L .

c) $\forall \begin{cases} \angle BKC = \angle BAC \\ \angle BCK = \angle KAC = \angle PAQ \end{cases} \Rightarrow \triangle APQ \sim \triangle KBC$.

Mà M, N lần lượt là trung điểm của BC và $PQ \Rightarrow \angle PAN = \angle KBM = \angle KBE = \angle BAO = \angle PAO$.

Suy ra AN đi qua điểm O cố định.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho 676 số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai số trong các số đã cho mà hiệu của chúng chia hết cho 2022.

Lời giải

Ta có: $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$.

Trong 676 số nguyên tố có tối đa một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3 và một số chia hết cho 337.

Do đó trong 676 số nguyên tố đã cho có 673 số nguyên tố không chia hết cho 3 hoặc 337.

Trong 673 số này chia 3 dư 2 hoặc 1 nên theo nguyên lý Dirichle tồn tại ít nhất 337 số nguyên tố có cùng số dư khi chia cho 3.

Mặt khác 337 số nguyên tố này chia cho 337 có số dư có thể là 1; 2; 3;...; 336. Theo nguyên lý Dirichle thì tồn tại hai số a, b trong 337 số nguyên tố có cùng số dư khi chia cho 337.

Mặt khác hai số a, b này có cùng số dư chia hết cho 3. Hơn nữa đây là hai số lẻ, suy ra $a - b$ chia hết cho 2.

Từ đây suy ra tồn tại hai số nguyên tố a, b trong 676 số nguyên tố mà hiệu của chúng chia hết cho 2022.

-----Chúc các bạn học tốt!-----