

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I. (2,0 điểm) Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \frac{1}{x+2\sqrt{x}-3} \begin{pmatrix} x \geq 0; x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{pmatrix}$$

- 1) Rút gọn biểu thức A
- 2) Tìm tất cả các giá trị của x để $A > -2$

Câu II. (2,0 điểm)

1. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = (m-2)x + 2m - 1$ (với m là tham số) và điểm $A(-1; 2)$. Tìm tất cả các giá trị của m để khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất
2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y-1)(x^2+y^2+1) = x^2+y^2-x+y+3 \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+3} = -x^2+2x+8 \end{cases}$$

Câu III. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có các góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AK, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H và cắt đường tròn $(O; R)$ tại các điểm lần lượt là M, N, P (M khác A , N khác B , P khác C)

1. Chứng minh $EF \parallel PN$
2. Chứng minh diện tích tứ giác $AEOF$ bằng $\frac{EF \cdot R}{2}$
3. Tính giá trị biểu thức $\frac{AM}{AK} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF}$
4. Gọi S và Q là chân đường vuông góc kẻ từ điểm K đến các cạnh AB, AC . Đường thẳng QS cắt BC tại G , đường thẳng GA cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm J (J khác A). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCQS$. Chứng minh ba điểm I, K, J thẳng hàng

Câu IV. (1,0 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - y^2 - 32x + 4y + 20 = 0$$

Câu V. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0$.

Chứng minh : $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 3$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,0 điểm) Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \frac{1}{x+2\sqrt{x}-3} \begin{pmatrix} x \geq 0; x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{pmatrix}$$

3) Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \frac{1}{x+2\sqrt{x}-3} \begin{pmatrix} x \geq 0; x \neq 1 \\ x \neq 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)^2 - (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) - 9+x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} \cdot (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1) \\ &= \frac{(x-4\sqrt{x}+4-x+9-9+x)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-2} = \frac{(x-4\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)^2 \cdot (\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-2} = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1) = x-3\sqrt{x}+2 \end{aligned}$$

4) Tìm tất cả các giá trị của x để A > -2

$$A > -2 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2 > -2 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \quad (\forall x \geq 0, x \neq 4; x \neq 1) \Rightarrow x \in \mathbb{R} / x \geq 0, x \neq 4; x \neq 1$$

Câu II. (2,0 điểm)

3. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = (m-2)x + 2m-1$ (với m là tham số) và điểm A(-1;2). Tìm tất cả các giá trị của m để khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất

Gọi M(x₀; y₀) là điểm cố định nằm trên đường thẳng d

$$\Leftrightarrow y_0 = (m-2)x_0 + 2m-1 \text{ có nghiệm với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow m(x_0+2) - 2x_0 - y_0 - 1 = 0 \quad (\forall m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+2=0 \\ -2x_0-y_0-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=3 \end{cases} \Rightarrow M(-2;3)$$

Gọi H là hình chiếu của A trên d $\Rightarrow AH \leq AM$

Khoảng cách AH lớn nhất là AM khi H $\equiv$ M $\Leftrightarrow AM \perp d$

Phương trình đường thẳng AM : y = -x + 1

$$AM \perp (d) \Rightarrow (m-2) \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow m = 3$$

4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y-1)(x^2+y^2+1) = x^2+y^2-x+y+3 & (1) \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+3} = -x^2+2x+8 & (2) \end{cases}$$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x \geq -6 \\ y \geq -3 \end{cases}$$

$$(x-y-1)(x^2+y^2+1)=x^2+y^2-x+y+3$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)(x^2+y^2+2)=0 \Rightarrow x-y-2=0 \Leftrightarrow y=x-2 (\text{do } x^2+y^2+2 > 0)$$

Thay $y=x-2$ vào phương trình (2) ta được :

$$\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=-x^2+2x+8 (x \geq -1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+6}-3+\sqrt{x+1}-2+x^2-2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3}+\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}+(x-3)(x+1)=0$$

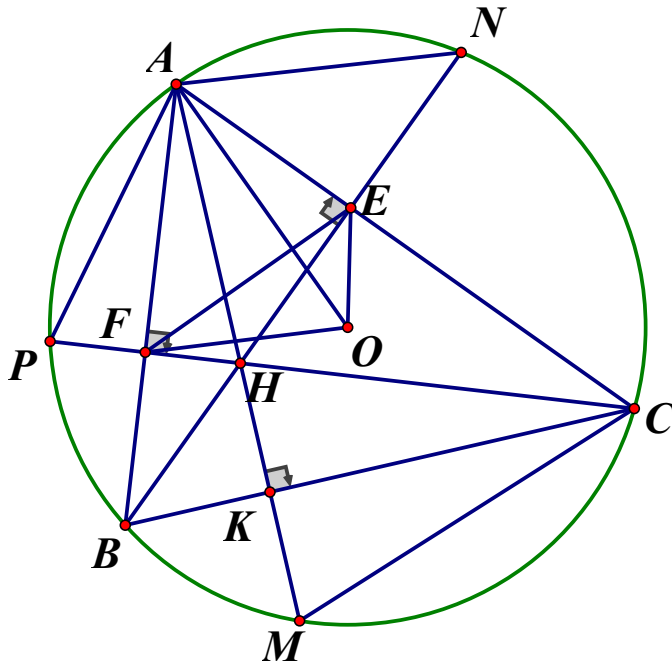
$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}+x+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \left(\text{do } \frac{1}{\sqrt{x+6}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}+x+1 > 0, \forall x \geq -1 \right)$$

$$\Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(3;1)$

Câu III. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có các góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường cao AK, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H và cắt đường tròn $(O;R)$ tại các điểm lần lượt là M, N, P (M khác A , N khác B , P khác C)



5. Chứng minh $EF \parallel PN$

$\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow \angle CBE = \angle CFE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC)

Mà $\angle CBE = \angle CPN$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CN)

$\Rightarrow \angle CFE = \angle CPN \Rightarrow EF \parallel PN$

6. Chứng minh diện tích tứ giác $AEOF$ bằng $\frac{EF.R}{2}$

$\angle ABN = \angle ACP$ (cùng phụ với $\angle BAC$) $\Rightarrow AN = AP$

$ON = OP = R \Rightarrow A, O$ nằm trên đường trung trực của PN

$\Rightarrow AO \perp PN$, mà $EF \parallel PN \Rightarrow AO \perp EF \Rightarrow S_{AEOF} = \frac{EF.R}{2}$

7. Tính giá trị biểu thức $\frac{AM}{AK} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF}$

$\angle BAM = \angle BCM$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

$\Rightarrow \angle BAM = \angle BCF$ (cùng phụ với $\angle ABC$) $\Rightarrow \angle BCF = \angle BCM$

ΔMCH có CK vừa là đường phân giác vừa là đường cao

$\Rightarrow \Delta MCH$ cân tại $C \Rightarrow K$ là trung điểm của MH

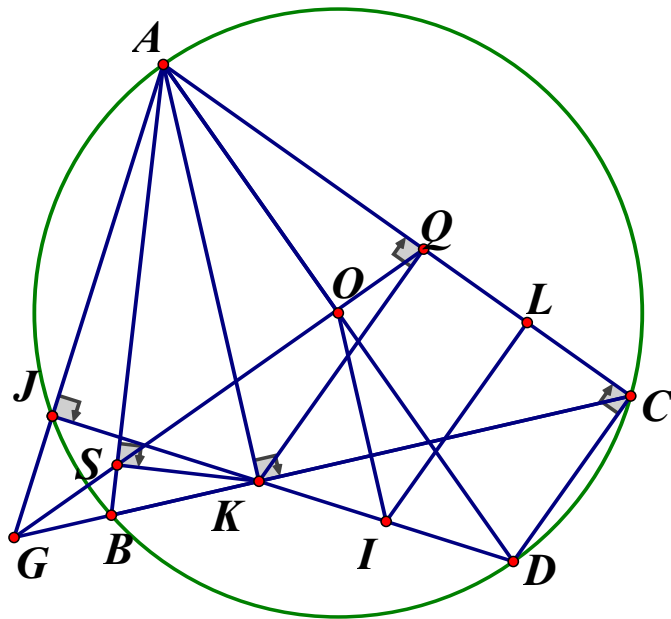
$$\begin{aligned} \frac{AM}{AK} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF} &= \frac{AK + KM}{AK} + \frac{BE + EN}{BE} + \frac{CF + FP}{CF} \\ &= 3 + \frac{KM}{AK} + \frac{EN}{BE} + \frac{FP}{CF} \Rightarrow \frac{KM}{AK} = \frac{KH}{AK} = \frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự: $\frac{EN}{BE} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}; \frac{FP}{CF} = \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}$

$$\frac{AM}{AK} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF} = 3 + \frac{S_{BHC} + S_{AHC} + S_{AHB}}{S_{ABC}} = 3 + 1 = 4$$

8. Gọi S và Q là chân đường vuông góc kẻ từ điểm K đến các cạnh AB, AC . Đường thẳng QS cắt BC tại G , đường thẳng GA cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm J (J khác A). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCQS$. Chứng minh ba điểm I, K, J thẳng hàng

***Hình vẽ phục vụ**



$\angle ASK + \angle AQK = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $ASQK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle ASQ = \angle AKQ$

$\angle AKQ = \angle BCQ$ (cùng phụ với $\angle CKQ$). Do đó $\angle ASQ = \angle BCQ \Rightarrow BSQC$ là tứ giác nội tiếp
 $\Rightarrow \angle GBS = \angle GQC$

$$\Delta GBS \sim \Delta GQC (g.g) \Rightarrow \frac{GB}{GQ} = \frac{GS}{GC} \Rightarrow GB.GC = GS.GQ (1)$$

Vì $ASKQ$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle GQK = \angle BAK$ mà $\angle BAK = \angle GKS$ (cùng phụ với SBK)

Mà $\angle BAK = \angle GKS$ (cùng phụ với $\angle SBK$) nên $\angle GQK = \angle GKS$

$$\Delta GQK \sim \Delta GKS (g.g) \Rightarrow \frac{GQ}{GK} = \frac{GK}{GS} \Rightarrow GK^2 = GS.GQ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $GK^2 = GB.GC, \angle GJB = \angle GCA$

$$\Rightarrow \Delta GJB \sim \Delta GCA \Rightarrow \frac{GJ}{GC} = \frac{GB}{GA} \Rightarrow GJ.GA = GB.GC$$

$$\Rightarrow GK^2 = GJ.GA \Rightarrow \frac{GK}{GA} = \frac{GJ}{GK} \Rightarrow \Delta GKJ \sim \Delta GAK$$

$$\Rightarrow \angle GJK = \angle GKA = 90^\circ \Rightarrow AJ \perp JK$$

JK cắt (O) tại D (D khác K) thì AD là đường kính của (O)

Gọi I là trung điểm KD , L là trung điểm QC

Khi đó OI là đường trung bình của $\Delta AKD \Rightarrow OI \parallel AK \Rightarrow OI \perp BC$

Mà $OB = OC$ nên OI là trung trực BC (3)

Vì $KQ // DC$ (cùng vuông góc với AC) nên $KQCD$ là hình thang

$\Rightarrow IL$ là đường trung bình của hình thang $KQCD \Rightarrow IL // KQ \Rightarrow IL \perp QC$

$\Rightarrow IL$ là trung trực của QC (4)

Từ (3) và (4) suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BSQC$

Vậy I, K, J thẳng hàng

Câu IV. (1,0 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - y^2 - 32x + 4y + 20 = 0$$

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - y^2 - 32x + 4y + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 32x + 24 = y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 (x^2 - 2x + 6) = (y-2)^2$$

Với $y = 2 \Rightarrow x = 2$

Với $y \neq 2$, ta có $(y-2)^2$ và $(x-2)^2$ là số chính phương khác 0 nên $x^2 - 2x + 6$ là số chính phương. Đặt $x^2 - 2x + 6 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}^*$)

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 5 = m^2 \Leftrightarrow (x-1-m)(x-1+m) = -5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1+m=5 \\ x-1-m=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ m=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1+m=0 \\ x-1-m=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ m=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=11 \\ y=-7 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy các bộ $(x; y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là $(2; 2), (3; 5), (3; -1), (-1; 11), (-1; -7)$

Câu V. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0$.

Chứng minh : $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 3$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 2$$

Đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c} (x, y > 0) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 + xy - 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)^2 = xy$$

Áp dụng bất đẳng thức Co si, ta có $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$. Do đó :

$$(x+y-1)^2 \leq \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow [3(x+y)-2][2-(x+y)] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x+y \leq 2$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{c^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \\ &= \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{(x+y-1)^2} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \\ &= \left(\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2xy} \right) + \left(\frac{1}{2xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \right) \geq \frac{4}{(x+y)^2} + 2\sqrt{\frac{1}{2(x+y)\sqrt{xy}}} \\ P &\geq \frac{4}{2^2} + 2\sqrt{\frac{1}{2.2}} = 2 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1 \Leftrightarrow a=b=c$