

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2023-2024**

Ngày thi: 03/6/2023

Bài 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $K = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + 1 \right) (\sqrt{x} - x)$.

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức K .
b) Tìm tất cả các số thực x để $K \geq x^3$.

Bài 2. (1,0 điểm) Cho phương trình $x^2 + 2(m-1)x + m^2 = 0$ (ẩn là x). Tìm các giá trị m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thoả mãn hệ thức $2x_1x_2 - x_1 - x_2 = 1$.

Bài 3. (1,0 điểm) Giải phương trình $x^2 - 4x + 1 = 2\sqrt{2x - 1}$.

Bài 4. (1,0 điểm) Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $\begin{cases} x + y - xy + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4xy + 27 = 0 \end{cases}$.

Bài 5. (1,0 điểm) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương.

Bài 6. (0,5 điểm) Cho một hình vuông có cạnh bằng 19 và có 2024 điểm phân biệt tùy ý trong hình vuông. Chứng minh rằng luôn tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa ít nhất 6 điểm trong 2024 điểm đã cho (các hình đã cho đều đo bằng cùng đơn vị đo).

Bài 7. (0,5 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thay đổi và thoả mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + x^2}$.

Bài 8. (1,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh AB có độ dài bằng $2\sqrt{2}$. Gọi điểm M thuộc cạnh AC sao cho $MC = 2AM$. Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với BM tại H và cắt BC tại D . Điểm K thuộc đường thẳng AD sao cho $CK \perp AD$. Tính độ dài đoạn AH và đoạn CD .

Bài 9. (2,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$), cả ba góc đều là góc nhọn và nội tiếp trong đường tròn tâm O . Ba đường cao của tam giác $\triangle ABC$ là AD, BM, CN ($D \in BC, M \in AC, N \in AB$) đồng quy tại H . Đường thẳng MN cắt BC tại S . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AH và BC , Q là giao điểm của AD với MN . Đường thẳng qua H song song với BC cắt SM tại P .

- c) Chứng minh $\frac{HQ}{HD} = \frac{OK}{ID}$.

----- **HẾT** -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM THI - ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN (chuyên)

(gồm có 05 trang)

A. HƯỚNG DẪN CHUNG

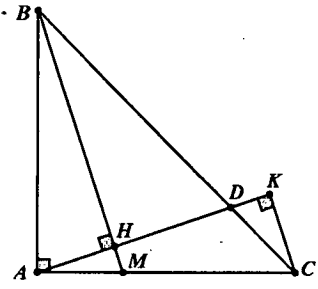
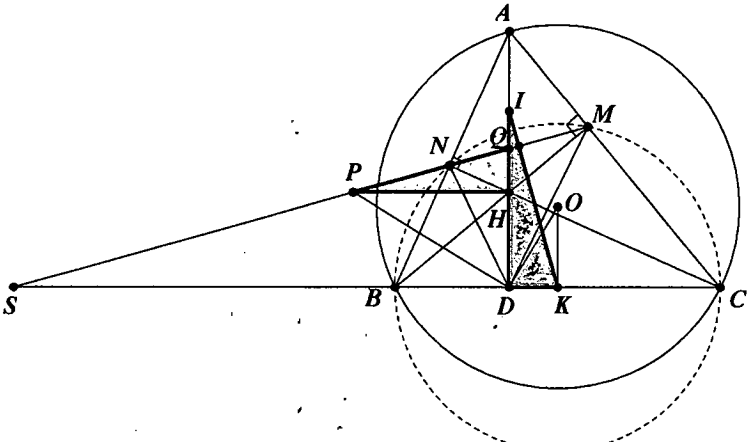
- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định;
- Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm lệch hướng dẫn chấm;
- Sau khi cộng điểm toàn bài thi vẫn giữ nguyên số điểm, không được làm tròn.

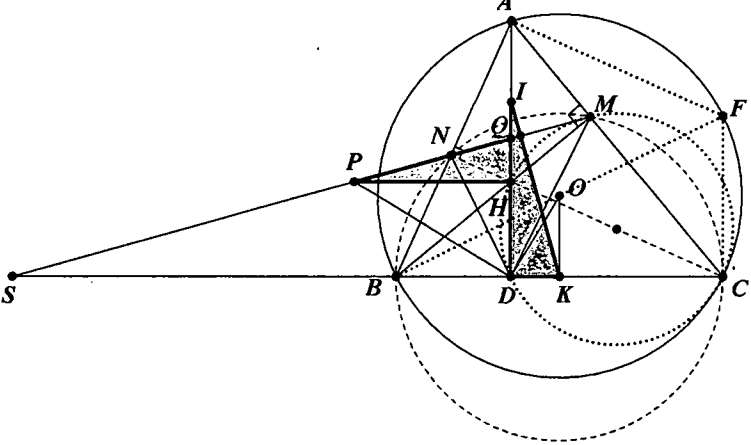
B. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

Bài	Ý	Nội dung	Biểu điểm
Bài 1. (1,5 điểm)	a.	Cho biểu thức $K = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + 1 \right) (\sqrt{x} - x)$.	
		a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức K .	
		Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases}$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$	0.25
		Với điều kiện đã đặt ta có: $K = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \sqrt{x} (1 - \sqrt{x})$.	0.25
		$K = -x$	0.25
Bài 2. (1,0 điểm)	b.	b) Tìm tất cả số thực x để $K \geq x^3$. Ta có $K \geq x^3 \Leftrightarrow -x \geq x^3 \Leftrightarrow x(1+x^2) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.	0.25
		So với điều kiện xác định của biểu thức K nhận được $x = 0$.	0.25
Bài 2. (1,0 điểm)		Cho phương trình $x^2 + 2(m-1)x + m^2 = 0$ (ẩn là x). Tìm các giá trị m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thoả mãn hệ thức $2x_1x_2 - x_1 - x_2 = 1$.	
		Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - 1 \cdot m^2 = m^2 - 2m + 1 - m^2 = -2m + 1$	0.25
		Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$	0.25
		Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m-1) \\ x_1x_2 = m^2 \end{cases}$ Theo đề bài: $2x_1x_2 - x_1 - x_2 = 1 \Leftrightarrow 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow 2m^2 + 2(m-1) = 1$	0.25

		$\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2} \approx -1,8 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} \approx 0,8 \end{cases}$ So với điều kiện $m < \frac{1}{2} = 0,5$, ta nhận $m = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}$.	0.25
Bài 3. (1,0 điểm)		Giải phương trình $x^2 - 4x + 1 = 2\sqrt{2x - 1}$.	
		Điều kiện để căn thức xác định: $x \geq \frac{1}{2}$.	
		Đặt $t = \sqrt{2x - 1}, t \geq 0$.	
		Ta có $t^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{t^2 + 1}{2}$, thay vào phương trình đã cho ta có	0.25
		$\left(\frac{t^2 + 1}{2}\right)^2 - 2(t^2 + 1) + 1 = 2t \Leftrightarrow t^4 - 6t^2 - 8t - 3 = 0$	0.25
		$\Leftrightarrow (t - 3)(t + 1)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (nhân)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$	0.25
		$\Rightarrow \sqrt{2x - 1} = 3 \Leftrightarrow x = 5$.	
		Thử lại ta thấy $x = 5$ là nghiệm của phương trình đã cho.	0.25
Bài 4. (1,0 điểm)		Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $\begin{cases} x + y - xy + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4xy + 27 = 0 \end{cases}$	
		Đặt $S = x + y, P = xy$ ($S^2 - 4P \geq 0$).	
		Thế vào hệ phương trình đã cho ta được $\begin{cases} S - P + 9 = 0 \\ S^2 - 6P + 27 = 0 \end{cases}$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} P = S + 9 \\ S^2 - 6S - 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S + 9 \\ \begin{cases} S = -3 \\ S = 9 \end{cases} \end{cases}$	0.25
		Với $S = -3, P = 6$, ta có phương trình $X^2 + 3X + 6 = 0$, vô nghiệm vì $\Delta = S^2 - 4P = -15 < 0$. Với $S = 9 \Rightarrow P = 18$, ta có phương trình $X^2 - 9X + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 6 \\ X_2 = 3 \end{cases}$	0.25
		Vậy có 2 cặp số thực $(x; y) \in \{(3; 6), (6; 3)\}$ thỏa yêu cầu.	0.25
Bài 5. (1,0 điểm)		Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương.	
		Vì $A = n^2 + n + 6$ là số chính phương nên A có dạng $A = n^2 + n + 6 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow 4n^2 + 4n + 24 = 4k^2$	0.25
		$\Leftrightarrow (2k)^2 - (2n + 1)^2 = 23 \Leftrightarrow (2k + 2n + 1)(2k - 2n - 1) = 23$	0.25

	Vì 23 là số nguyên tố và $2k + 2n + 1 > 2k - 2n - 1$ $\Rightarrow \begin{cases} 2k + 2n + 1 = 23 \\ 2k - 2n - 1 = 1 \end{cases}$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 2n = 22 \\ 2k - 2n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 5 \end{cases}$ Vậy có một số tự nhiên $n = 5$ thì A là số chính phương.	0.25
Bài 6. (0,5 điểm)	Cho một hình vuông có cạnh bằng 19 và có 2024 điểm phân biệt tùy ý trong hình vuông. Chứng minh rằng luôn tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa ít nhất 6 điểm trong 2024 điểm đã cho (các hình đã cho đều đo bằng cùng đơn vị đo). Ta phân hình vuông cạnh 19 thành $19 \times 19 = 361$ hình vuông đơn vị (có cạnh bằng 1). Vì có 2024 điểm chia vào 361 hình vuông đơn vị nên tồn tại 1 hình vuông đơn vị có chứa ít nhất $\left\lceil \frac{2024}{361} \right\rceil + 1 = 6$ điểm trong số 2024 điểm đã cho (theo nguyên lý <i>Dirichlet</i>). (Với $\left\lceil \frac{2024}{361} \right\rceil$ là phần nguyên, bằng 5)	0.25
	Đường tròn ngoại tiếp hình vuông đơn vị đó có bán kính bằng $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Suy ra tồn tại hình tròn có bán kính bằng 1 chứa ít nhất 6 điểm. Ta được đpcm.	0.25
Bài 7. (0,5 điểm)	Cho ba số thực dương x, y, z thay đổi và thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + x^2}$. Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương x, y ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{-1}{x^2 + y^2} \geq \frac{-1}{2xy}$ Lại có: $\frac{x^3}{x^2 + y^2} = \frac{x(x^2 + y^2) - xy^2}{x^2 + y^2} = x + \frac{-xy^2}{x^2 + y^2} \geq x + \frac{-xy^2}{2xy} = x - \frac{y}{2}$ Tương tự chứng minh được: $\frac{y^3}{y^2 + z^2} \geq y - \frac{z}{2}$ và $\frac{z^3}{z^2 + x^2} \geq z - \frac{x}{2}$ Cộng vế theo vế $\Rightarrow P \geq (x + y + z) - \frac{x + y + z}{2} = \frac{x + y + z}{2} = \frac{3}{2}$. Khi $x = y = z = 1$ thì $P = \frac{3}{2}$. Vậy $P_{\min} = \frac{3}{2}$.	0.25
Bài 8. (1,5 điểm)	Cho tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh AB có độ dài bằng $2\sqrt{2}$. Gọi điểm M thuộc cạnh AC sao cho $MC = 2AM$. Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với BM tại H và cắt BC tại D. Điểm K thuộc đường thẳng AD sao cho $CK \perp AD$. Tính độ dài đoạn AH và đoạn CD.	

			0.25
		Ta có $AM = \frac{1}{3}AC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$	0.25
		AH là đường cao của tam giác vuông MAB nên $AH = 1 : \sqrt{\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	0.25
		Ta có $CK \parallel BM$ (cùng vuông góc với AD) $\Rightarrow \frac{HM}{CK} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow CK = 3HM.$	0.25
		Ta cũng có $\frac{CD}{BD} = \frac{CK}{BH} = \frac{3HM}{BH} = \frac{3\sqrt{AM^2 - AH^2}}{\sqrt{AB^2 - AH^2}} = \frac{1}{3}$	0.25
		$\Rightarrow CD = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1.$	0.25
Bài 9. (2,0 điểm)		Cho ΔABC ($AB < AC$), cả ba góc đều là góc nhọn và nội tiếp trong đường tròn tâm O. Ba đường cao của tam giác ΔABC là AD, BM, CN ($D \in BC, M \in AC, N \in AB$) đồng quy tại H. Đường thẳng MN cắt BC tại S. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AH và BC, Q là giao điểm của AD với MN. Đường thẳng qua H song song với BC cắt SM tại P. a) Chứng minh $SB \cdot SC = SM \cdot SN$.	
	a.		0.25
		Ta có $\widehat{BNC} = \widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $BNMC$ nội tiếp (K).	
		$\Rightarrow \Delta SNC$ đồng dạng với ΔSBM (g-g).	
		$\Rightarrow \frac{SB}{SN} = \frac{SM}{SC} \Leftrightarrow SB \cdot SC = SM \cdot SN.$	0.25

b.	b) Chứng minh: ΔDIK đồng dạng với ΔHPQ. Tương tự ta có tứ giác $AMHN$ nội tiếp (I). Mà đường tròn (I) và (K) cắt nhau tại MN Suy ra IK là trung trực của $MN \Rightarrow IK \perp MN \Rightarrow IK \perp PQ$ Lại có: $PH \parallel BC$ và $AD \perp BC \Rightarrow ID \perp PH$ $\Rightarrow \widehat{DIK} = \widehat{HPQ}$ (Hai góc có cạnh tương ứng vuông góc, cả hai đều nhọn). $\Rightarrow \Delta DIK$ đồng dạng với ΔHPQ (g-g).	0.25
c.	c) Chứng minh $\frac{HQ}{HD} = \frac{OK}{ID}$.  Kẻ đường kính BF qua tâm O của đường tròn (O). $\Rightarrow AF \parallel CH$ (cùng vuông góc AB), $AH \parallel FC$ (cùng $\perp BC$) Suy ra tứ giác $AFCH$ là hình bình hành. Ta có $OK = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}AH \Rightarrow AH = 2OK$.	0.25
	Mặt khác ta có $\widehat{NMH} = \widehat{NCB}$ (cùng chắn cung $\widehat{NB}$). Mà tứ giác $HMCD$ cũng nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMD} = \widehat{HCD}$ (cùng chắn $\widehat{HD}$) Suy ra $\widehat{NMH} = \widehat{HMD}$, hay MH là đường phân giác trong của ΔMQD Mà $MA \perp MH$ $\Rightarrow MA$ là phân giác ngoài của ΔMQD $\Rightarrow \frac{HQ}{HD} = \frac{MQ}{MD} = \frac{AQ}{AD} \Rightarrow \frac{HQ}{HD} = \frac{AQ}{AD}$	0.25
	$\Rightarrow \frac{HQ}{HD} = \frac{AQ}{AD} = \frac{HQ + AQ}{HD + AD} = \frac{AH}{(ID - IH) + (AI + ID)} = \frac{2OK}{2ID}$ $\Rightarrow \frac{HQ}{HD} = \frac{OK}{ID}$ (đpcm)	0.25

-----HẾT-----