

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

Câu 1. (5 điểm) Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n} + 1} \quad \text{với mọi số nguyên dương } n.$$

Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

Câu 2. (5 điểm) Cho số thực q . Biết rằng tồn tại một cấp số cộng (a_n) có công sai là số thực dương sao cho: với mỗi số nguyên dương k thì q^k là một số hạng của dãy (a_n) . Chứng minh rằng q là số nguyên.

Câu 3. (6 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I) với $AB < AC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . D là tiếp điểm của BC và (I) . M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

(a) Đường thẳng qua D song song với AI , cắt MI tại S . Chứng minh rằng $SA = DI$.

(b) Lấy X, Y theo thứ tự thuộc MN, MP sao cho XP, YN là các tiếp tuyến của (I) . Chứng minh rằng XY vuông góc với IG .

Câu 4. (4 điểm) Có 2020 tấm thẻ đỏ và 2020 tấm thẻ xanh, trên mỗi tấm thẻ có ghi một số nguyên dương không vượt quá 2020 (hai số ghi trên hai tấm thẻ bất kì không nhất thiết phải khác nhau). Chứng minh rằng ta có thể chọn ra một bộ thẻ đỏ và một bộ thẻ xanh sao cho: tổng các số được ghi trên mỗi bộ thẻ bằng nhau.

(Nếu trong bộ chỉ có một tấm thẻ thì tổng các số ghi trên các tấm thẻ của bộ đó là số trên chính tấm thẻ ấy.)

.....**HẾT**.....

Học sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

Câu 1. (5 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = 2xf(x^2) \quad \text{với mọi } x \in [0; 1].$$

Câu 2. (6 điểm) Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ và

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì $(x_n^2 - 1)^2 + 1$ là hợp số.

(b) Cho k là một số nguyên dương và p là một ước nguyên tố của x_{2^k} . Chứng minh rằng nếu $p - 1$ chia hết cho 4 thì $p - 1$ chia hết cho 2^{k+2} .

Câu 3. (5 điểm) Cho tam giác ABC với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, OA . D là một điểm thuộc đoạn thẳng MC (D khác M, C). E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B, C trên AD . G là giao điểm của đường thẳng qua E song song với AB và đường thẳng qua F song song với AC . I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác GEF . Chứng minh rằng $NI = NM$.

Câu 4. (4 điểm) Một hội nghị có n người tham dự ($n \geq 5$). Biết rằng tồn tại một số nguyên dương m sao cho: trong $n - 2$ người bất kì tham dự hội nghị, luôn có đúng 3^m cặp quen biết nhau. Tìm tất cả các giá trị có thể của n .

.....**HẾT**.....

Học sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm.

A. Hướng dẫn giải ngày thi thứ nhất

1 (5 điểm) Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n} + 1} \quad \text{với mọi số nguyên dương } n.$$

Chúng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

Bài giải. Từ giả thiết ta có (a_n) xác định $a_n > 0$ với mọi n . Do vậy

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{a_n}} < \frac{a_n}{1} = a_n.$$

Vậy (a_n) là dãy giảm chặt. (1 điểm)

Cách 1. Thành thử (a_n) có giới hạn hữu hạn, đặt $\lim a_n = x$. Suy ra

$$x = \frac{x}{\sqrt{x} + 1}$$

hay $x = 0$. Vậy $\lim a_n = 0$. Theo định lý Stolz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = 0.$$

Cách 2. Ta có

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}.$$

Do đó

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_k}} > \frac{n}{\sqrt{a_1}} = n.$$

Vậy $a_{n+1} < \frac{1}{n+1}$. Suy ra $a_n \leq \frac{1}{n}$ với mọi n . Thành thử

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \geq \sqrt{n}.$$

Mặt khác,

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_k}} \geq \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

Mặt khác, với mỗi $k = \overline{1, n}$ thì

$$k\sqrt{k} - (k-1)\sqrt{k-1} \leq \frac{3}{2}\sqrt{k}$$

Do đó

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \geq \frac{2}{3}n\sqrt{n}.$$

Thành thử $a_{n+1} \leq \frac{3}{2} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Do vậy $\lim na_n = 0$.

Nhận xét. Học sinh sử dụng định lý Stolz đúng vẫn cho điểm tối đa.

2 (5 điểm) Cho số thực q . Biết rằng tồn tại một cấp số cộng (a_n) có công sai là số thực dương sao cho: với mỗi số nguyên dương k thì q^k là một số hạng của dãy (a_n) . Chứng minh rằng q là số nguyên.

Bài giải. Nếu $q = 0$ hoặc ± 1 thì ta có điều phải chứng minh. Giả sử $q \neq 0, \pm 1$ và $a_n = a + nd$ trong đó a, d là các số thực và $d > 0$. Theo giả thiết

$$\frac{q^k - a}{d}$$

là số nguyên với mọi k nguyên dương. Suy ra $\frac{q^{n+k} - a}{d} - \frac{q^k - a}{d}$ là số nguyên và do đó $\frac{q^k(q^n - 1)}{d}$ là số nguyên với mọi n, k . Đặt $b_n = \frac{q^n - 1}{d}$ thì $b_n q^k \in \mathbb{Z}$ với mọi n, k . Do đó $\frac{b_n q^{k+1}}{b_n q^k} \in \mathbb{Q}$ hay $q \in \mathbb{Q}$. Suy ra $b_n \in \mathbb{Q}$ với mọi n . Cố định n và viết $b_n = \frac{u_n}{v_n}$ trong đó u_n, v_n là các số nguyên. Giả sử $q = \frac{u}{v}$ trong đó u, v nguyên và $v > 0$. Nếu $v > 1$, ta lấy p là một ước nguyên tố của v . Từ $b_n q^k \in \mathbb{Z}$ ta suy ra $u_n u^k$ chia hết cho p^k . Mà $p \nmid u$ nên $p^k \mid u_n$ với mọi k . Suy ra $u_n = 0$, do đó $q^n = 1$, mâu thuẫn. Vậy $v = 1$ do đó q là số nguyên.

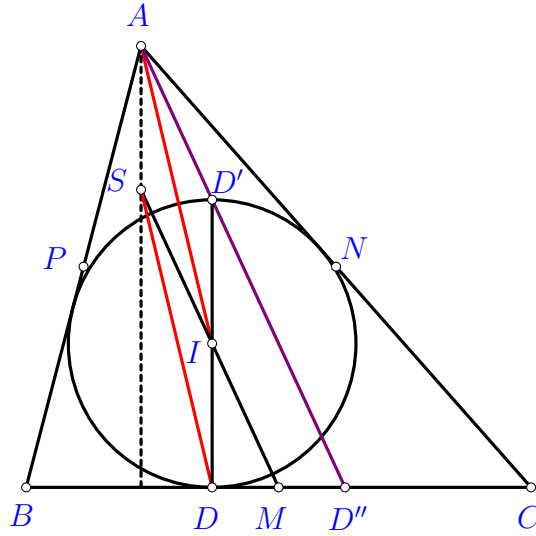
3 (6 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I) với $AB < AC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . D là tiếp điểm của BC và (I) . M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

(a) (2.5 điểm) Đường thẳng qua D song song với AI , cắt MI tại S . Chứng minh rằng $SA = DI$.

(b) (3.5 điểm) Lấy X, Y theo thứ tự thuộc MN, MP sao cho XP, YN là các tiếp tuyến của (I) . Chứng minh rằng XY vuông góc với IG .

Bài giải.

(a) Gọi D'' theo thứ tự đối xứng với D qua I và D'' là tiếp điểm của BC và đường tròn bàng tiếp góc A . Khi đó A, D', D'' thẳng hàng và M là trung điểm DD'' . Vì MI là đường trung bình của tam giác $DD'D''$ nên $MI \parallel D'D''$. Suy ra MI đi qua điểm trung điểm của AD .

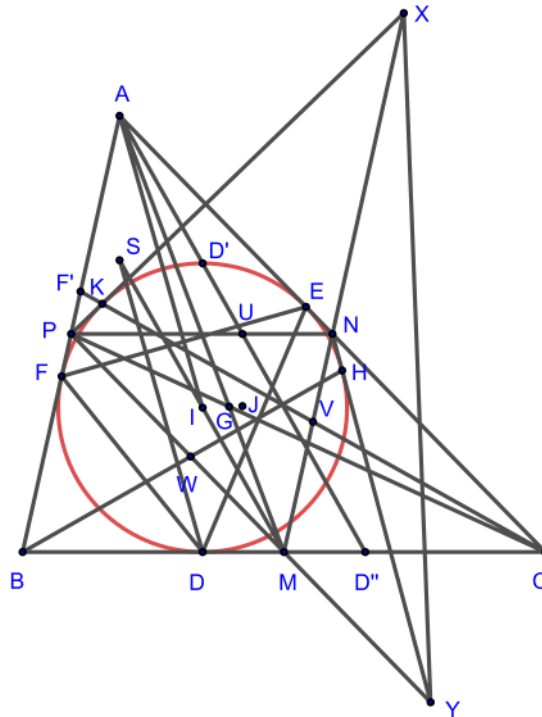


- (b) Gọi (J) là đường tròn nội tiếp tam giác MNP . U, V, W theo thứ tự là tiếp điểm của (J) và PN, NM, MP . K, H theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và XP, NY . F' đối xứng F qua P .

Dễ thấy F', K, V, C thẳng hàng (kết quả quen thuộc). Vì $PF' = PF = PK$ nên $\angle XKV = \angle F'KP = \angle PF'K = \angle XVK$. Suy ra $XK = XV$. Do đó $\mathcal{P}_{X/(I)} = \mathcal{P}_{X/(J)}$. Tương tự, $\mathcal{P}_{Y/(I)} = \mathcal{P}_{Y/(J)}$.

Vậy X, Y thuộc trục đẳng phương của $(I), (J)$. Do đó $XY \perp IJ$.

Chú ý rằng I, G, J thẳng hàng (kết quả quen thuộc). Vậy $XY \perp IG$.



4 (4 điểm) Có 2020 tấm thẻ đỏ và 2020 tấm thẻ xanh, trên mỗi tấm thẻ có ghi một số nguyên dương không vượt quá 2020 (hai số ghi trên hai tấm thẻ bất kì không nhất thiết phải khác nhau). Chứng minh rằng ta có thể chọn ra một bộ thẻ đỏ và một bộ thẻ xanh sao cho: tổng các số được ghi trên mỗi bộ thẻ bằng nhau.

(Nếu trong bộ chỉ có một tấm thẻ thì tổng các số ghi trên các tấm thẻ của bộ đó là số trên chính tấm thẻ ấy.)

Bài giải. Gọi $r_1, \dots, r_{2020}$ là các số được viết trên các tấm thẻ đỏ và $b_1, \dots, b_{2020}$ là các số được viết trên các tấm thẻ xanh. Nếu $r_1 + \dots + r_{2020} = b_1 + \dots + b_{2020}$ thì ta có điều phải chứng minh.

Không mất tổng quát giả sử rằng

$$r_1 + \dots + r_{2020} > b_1 + \dots + b_{2020}.$$

Với mỗi số nguyên dương $k = \overline{1, 2020}$ ta gọi $f(k)$ là số nguyên dương bé nhất sao cho

$$r_1 + \dots + r_{f(k)} \geq b_1 + \dots + b_k.$$

Nếu tồn tại $k \in \{1, \dots, 2020\}$ mà $r_1 + \dots + r_{f(k)} = b_1 + \dots + b_k$ thì ta có điều phải chứng minh. Giả sử rằng

$$r_1 + \dots + r_{f(k)} > b_1 + \dots + b_k$$

với mọi $k = 1, \dots, 2020$. Xét hiệu

$$A_k = (r_1 + \dots + r_{f(k)}) - (b_1 + \dots + b_k).$$

thì $A_1, \dots, A_{2020}$ là 2020 số nguyên dương. Mặt khác, với mỗi $k = 1, \dots, 2020$ mà $f(k) > 1$ thì $(r_1 + \dots + r_{f(k)-1}) - (b_1 + \dots + b_k) < 0$ nên $A_k < r_k \leq 2020$. Nếu $f(k) = 1$ thì đương nhiên $A_k < b_1 \leq 2020$. Vậy $A_1, \dots, A_{2020}$ là các số nguyên dương không vượt quá 2019. Thành thử theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại $1 \leq k_1 < k_2 \leq 2020$ sao cho $A_{k_1} = A_{k_2}$. Suy ra

$$r_{f(k_1)+1} + \dots + r_{f(k_2)} = b_{k_1+1} + \dots + b_{k_2}.$$

Điều này suy ra kết luận bài toán.

.....**HẾT NGÀY 1**.....

B. Hướng dẫn giải ngày thi thứ hai

1 Tìm tất cả các hàm số $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = 2xf(x^2) \quad \text{với mọi } x \in [0, 1].$$

Bài giải. Thay $x = 0, x = 1$ cho ta $f(0) = f(1) = 0$. Với mỗi $x \in (0, 1)$, từ giả thiết ta có

$$f(x) = 2xf(x^2) = 2^2x^{1+2}f(x^{2^2}) = 2^3x^{1+2+2^2}f(x^{2^3}) = \dots = 2^n x^{2^n-1}f(x^{2^n}). \quad (1)$$

Với $0 < x < 1$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2^n} = 0$. Do f liên tục trên $[0, 1]$ nên f liên tục phải tại 0. Thành thử $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{2^n}) = f(0)$. Mặt khác ta có kết quả sau

Bổ đề 1. Với mỗi $x \in (0, 1)$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0.$$

Chứng minh. Dùng Stolz hoặc làm như sau: Đặt $\frac{1}{x} = 1 + y$ trong đó $y > 0$. Vì $(1 + y)^n \geq 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2}y^2$ với mọi $n \geq 2$. Do đó

$$0 < nx^n = \frac{n}{(1+y)^n} \leq \frac{n}{1 + ny + \frac{n(n-1)}{2}y^2} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Vậy tồn tại giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$. □

Thành thử

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n x^{2^n-1} f(x^{2^n}) = 0 \quad \text{với mọi } 0 < x < 1.$$

Từ (1) ta được $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (0, 1)$.

Do đó $f(x) = 0$ với mọi $x \in (0, 1)$. Vậy $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0, 1]$.

2 Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = 1, x_1 = 3$ và

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

(a) (3 điểm) Chứng minh rằng $(x_n^2 - 1)^2 + 1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n .

(b) (3 điểm) Giả sử p là một số nguyên tố thỏa mãn $p \equiv 1 \pmod{4}$ và k là số nguyên dương sao cho $p \mid x_{2^k}$. Chứng minh rằng $p - 1$ chia hết cho 2^{k+2} .

Bài giải.

(a) Ta có

$$x_n = \frac{u^n + v^n}{2} \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

trong đó $u = 3 + 2\sqrt{2}$ và $v = 3 - 2\sqrt{2}$. Từ đây

$$x_n^2 - 1 = \left(\frac{u^n - v^n}{2} \right)^2 = 2 \left(\frac{u^n - v^n}{2\sqrt{2}} \right)^2.$$

Đặt $y_n = \frac{u^n - v^n}{2\sqrt{2}}$ thì $y_0 = 0$, $y_1 = 2$ và $y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n$ với mọi n . Suy ra (y_n) là dãy số nguyên. Dễ thấy $y_n > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Thành thử

$$(x_n^2 - 1)^2 + 1 = 4y_n^4 + 1.$$

Với $n \geq 1$ thì $y_n \geq 2$ và $4y_n^4 + 1 = (2y_n^2 - 2y_n + 1)(2y_n^2 + 2y_n + 1)$ là tích của hai số nguyên lớn hơn 1. Vậy $(x_n^2 - 1)^2 + 1$ là hợp số.

Cách 2. Ta có

$$\frac{x_{n+2} + x_n}{x_{n+1}} = 6 = \frac{x_{n+1} + x_{n-1}}{x_n}$$

với mọi $n \geq 2$. Thành ra $x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} = x_{n+1}^2 - x_nx_{n+2}$ với mọi $n \geq 2$. Do đó

$$x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1} = x_1^2 - x_2x_0 = 9 - 17 = -8$$

Do đó

$$x_n^2 - x_{n+1}(6x_n - x_{n+1}) = -8$$

hay $x_{n+1}^2 + x_n^2 - 6x_nx_{n+1} + 8 = 0$. Vậy $8(x_n^2 - 1) = (x_{n+1} - 3x_n)^2$. Thành thử $2(x_n^2 - 1)$ là số chính phương.

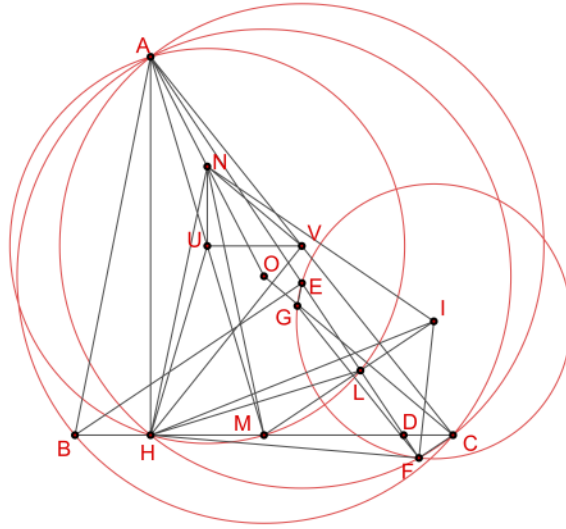
(b) Ta có $p \mid x_{2^k}$ thì $p \mid 2y_{2^k}^2 + 1$. Suy ra $\left(\frac{-2}{p} \right) = 1$. Vì $p \equiv 1 \pmod{4}$ nên $\left(\frac{2}{p} \right) = 1$. Vậy tồn tại a nguyên dương mà $a^2 \equiv 2 \pmod{p}$. Ta có

$$\begin{aligned} 2x_{2^k} &= \left(\sqrt{2} + 1 \right)^{2^{k+1}} + \left(\sqrt{2} - 1 \right)^{2^{k+1}} \\ &= 2 \sum_{\substack{i=0, 2^{k+1} \\ 2 \mid i}} C_{2^{k+1}}^i 2^{i/2} \\ &\equiv 2 \sum_{\substack{i=0, 2^{k+1} \\ 2 \mid i}} C_{2^{k+1}}^i a^i \pmod{p} \\ &\equiv (a+1)^{2^{k+1}} + (a-1)^{2^{k+1}} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Do p lẻ nên $p \nmid a-1$. Chọn b sao cho $(a-1)b \equiv 1 \pmod{p}$ thì $(ab+b)^{2^{k+1}} \equiv -1 \pmod{p}$. Từ đây $p \equiv 1 \pmod{2^{k+2}}$.

3 (5 điểm) Cho tam giác ABC với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, OA . D là một điểm thuộc đoạn thẳng MC (D khác M, C). E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B, C trên AD . G là giao điểm của đường thẳng qua E song song với AB và đường thẳng qua F song song với AC . I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác GEF . Chứng minh rằng $NI = NM$.

Bài giải. Gọi U, V, L theo thứ tự là trung điểm của AM, AC, EF . H là hình chiếu vuông góc của A trên BC . $(U), (V)$ theo thứ tự là đường tròn đường kính AM, AC .



Vì $CF \perp AF$ nên F thuộc đường tròn (V) . Theo định lí Thales đảo, $ML \perp AL$. Do đó L thuộc đường tròn (U) . Dễ thấy A, H là các giao điểm của (U) và (V) . Vậy tam giác HLF đồng dạng cùng hướng với tam giác HUV (1).

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF nên $IL \perp LF$ và

$$\begin{aligned} (IL, IF) &\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IF}) \equiv (GE, GF) \equiv (AB, AC) \\ &\equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv (OM, OC) \equiv (NU, NV) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Do đó tam giác ILF đồng dạng và cùng hướng với tam giác NUV (2).

Từ (1) và (2) suy ra tam giác HLI đồng dạng và cùng hướng tam giác HUN . Do đó tồn tại các số k, α sao cho

$$U = V_H^k \circ Q_H^\alpha(N), L = V_H^k \circ Q_H^\alpha(I),$$

Khi đó $V_H^k \circ Q_H^\alpha(\triangle HNI) = \triangle HUL$. Dễ thấy $UH = UL$. Suy ra $NH = NI$. Kết hợp với $NH = NM$, ta có $NM = NI$.

4 (4 điểm) Một hội nghị có n người tham dự ($n \geq 5$). Biết rằng tồn tại một số nguyên dương m sao cho: trong $n - 2$ người bất kì tham dự hội nghị, luôn có đúng 3^m cặp quen biết nhau. Tìm tất cả các giá trị có thể của n .

Bài giải.

Nhận xét. Nếu A_i, A_j quen nhau thì A_k quen với cả A_i và A_j với mọi $k \notin \{i, j\}$.

Chứng minh. Thật vậy, ta có thể coi $i = 1, j = 2, k = 3$. Giả sử A_3 không quen A_1 . Xét tập $G = \{A_4, A_5, \dots, A_n\}$.

Theo giả thiết thì trong mỗi nhóm $G \cup \{A_1\}, G \cup \{A_2\}, G \cup \{A_3\}$ có đúng 3^m cặp quen biết nhau do đó số lượng người quen của A_1, A_2, A_3 trong G là bằng nhau, gọi số này là p .

Xét nhóm $X_1 = G \cup \{A_1, A_2\}$, nhóm này có $n - 1$ người và có $3^m + p + 1$ cặp quen nhau. Nếu loại đi một người bất kỳ trong nhóm X_1 thì trong nhóm còn lại có $n - 2$ người và do đó có 3^m cặp quen nhau, như vậy người bị loại đi có đúng $p + 1$ người quen trong nhóm còn lại, nói cách khác, mỗi người trong X_1 có đúng $p + 1$ người quen trong nhóm này. Vậy ta có $3^m + p + 1 = \frac{(n-1)(p+1)}{2}$

Xét nhóm $X_2 = G \cup \{A_1, A_3\}$, nhóm này có $n - 1$ người và có $3^m + p$ cặp quen nhau. Lí luận tương tự như trên thì ta có: $3^m + p = \frac{(n-1)p}{2}$.

Từ hai điều trên cho ta $1 = \frac{n-1}{2}$ hay $n = 3$ vô lí.

Nhận xét. Hai người bất kỳ trong hội nghị thì quen nhau.

Chứng minh. Trong hội nghị phải có hai người quen nhau, không mất tổng quát, giả sử A_1, A_2 quen nhau. Theo nhận xét 1 thì mọi người trong hội nghị đều quen với cả A_1, A_2 . Xét hai người A_i, A_j bất kỳ, ta có thể giả sử $i \neq 1$, như vậy A_i quen A_1 . Theo nhận xét 1 thì A_j quen với cả A_1 và A_i hay A_i, A_j là quen nhau.

Theo nhận xét 2 thì trong $F = G \cup \{A_1\}$, mỗi người có đúng $n - 3$ người quen trong nhóm F vì vậy trong F có $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ cặp quen nhau. Mặt khác, theo giả thiết thì trong F có 3^m cặp quen nhau, vậy ta có

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} = 3^m.$$

Suy ra $n = 5$.

Ngược lại, với 5 người tham gia hội nghị mà hai người bất kỳ quen nhau thì thỏa mãn các yêu cầu đặt ra. Vậy $n = 5$ là đáp số duy nhất.

.....**HẾT NGÀY 2**.....
TS. Hà Duy Hưng