

**SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO
CẦN THƠ**

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10

NĂM HỌC: 2023 – 2024

Môn: TOÁN (chuyên)

Khoá thi ngày: 07/6/2023

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức

$$Q = \left(\frac{10 - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - x - \sqrt{x} + 1} + \frac{6}{x-1} \right) : \frac{4\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1} \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức Q .

b) Đặt $P = Q \cdot (x - \sqrt{x} + 1)$. Chứng minh rằng $P > 1$

Câu 2. (1,5 điểm) Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng

$(d): y = (m+2)x - m + 2$. Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol

(P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ cùng nằm bên phải trục tung

Câu 3. (2,0 điểm)

Giải phương trình và hệ phương trình sau trên tập số thực:

a) $x^2 + 1 = 2x + \sqrt{3x-1}$

b)
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy - x + y = 0 \\ x^2 - 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 + 20y^2 + 65 + 2x(1+y) = 2y(30-x)$.

b) Hướng ứng phong trào Xanh hóa trường học, lớp 9A và lớp 9B được nhà trường giao chỉ tiêu trồng 80 cây xanh xung quanh sân vườn của trường. Nếu lớp 9A trồng trong 2 giờ và lớp 9B trồng trong 1 giờ thì được 25 cây. Nếu lớp 9A trồng trong 1 giờ và lớp 9B trồng trong 2 giờ thì được 23 cây. Hỏi nếu cả hai lớp cùng trồng với nhau thì sau bao lâu hoàn thành chỉ tiêu được giao? Biết rằng, mỗi giờ số cây trồng được của mỗi lớp là không đổi

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Dựng bên ngoài tam giác ABC các tam giác đều ANI và BMK . Gọi điểm D là hình chiếu vuông góc của điểm A lên cạnh BC , điểm E là trung điểm của đoạn thẳng IK .

a) Chứng minh tứ giác $AKBD$ nội tiếp.

b) Chứng minh điểm E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD .

c) Tính số đo của $\widehat{NEM}$

Câu 6. (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{3x+z}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{3z+x}{x+y} \geq 6$

----- **Hết** -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (1,5 điểm) Cho biểu thức:

$$P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 4, x \neq 9.$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả số nguyên x sao cho P nhận giá trị là số nguyên

Lời Giải

a) Với $x \geq 0$ và $x \neq 4, x \neq 9$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+3)(3-\sqrt{x}) + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(3-\sqrt{x})} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{9-x+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(3-\sqrt{x})} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-9+9-x+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{-\sqrt{x}+x-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

b)

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

Để P nhận giá trị là số nguyên thì $\frac{4}{\sqrt{x}-3}$ phải nhận giá trị là số nguyên $\Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3} \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$

- $\frac{4}{\sqrt{x}-3} = -4 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 = -1 \Rightarrow x = 4$ (loại)
- $\frac{4}{\sqrt{x}-3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 = 4 \Rightarrow x = 49$
- $\frac{4}{\sqrt{x}-3} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 = -2 \Rightarrow x = 1$
- $\frac{4}{\sqrt{x}-3} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 = 2 \Rightarrow x = 25$
- $\frac{4}{\sqrt{x}-3} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 = -4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -1$ (loại)
- $\frac{4}{\sqrt{x}-3} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 = 1 \Rightarrow x = 16$

Vậy $x \in \{1; 16; 25; 49\}$ thì P nhận giá trị là số nguyên

Câu 2: (1,0 điểm) Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $(d): y = 2mx - 4m + 5$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$. Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O .

Lời Giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = 2mx - 4m + 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 2mx + 4m - 5 = 0$$

$$\Delta = 4m^2 - 16m + 20 > 0 (\forall m)$$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x_A = \frac{2m + \sqrt{4m^2 - 16m + 20}}{2} = m + \sqrt{m^2 - 4m + 5} \Rightarrow y_A = \left(m + \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)^2 \\ x_B = \frac{2m - \sqrt{4m^2 - 16m + 20}}{2} = m - \sqrt{m^2 - 4m + 5} \Rightarrow y_B = \left(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)^2 \end{cases}$$

ΔAOB vuông tại O

$$\Rightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2 \text{ (Định lý Pythagoras)}$$

$$\Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$\Leftrightarrow x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 = x_A^2 - 2x_Ax_B + x_B^2 + y_A^2 - 2y_Ay_B + y_B^2$$

$$\Leftrightarrow x_Ax_B + y_Ay_B = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m + \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)\left(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right) + \left(m + \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)^2\left(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(m + \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)\left(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right) = 0 \\ \left(m + \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)\left(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right) = -1 \end{cases}$$

Giải (1):

$$\left(m + \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)\left(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - (m^2 - 4m + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{5}{4} \text{ (loại vì khi } m = \frac{5}{4} \text{ thì sẽ nhận được } x_B = 0 \text{ và } y_B = 0, \text{ điểm } B \text{ trùng với điểm } O \text{ không tạo}$$

được tam giác)}

Giải (2):

$$\left(m + \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right)\left(m - \sqrt{m^2 - 4m + 5}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - (m^2 - 4m + 5) = -1$$

$$\Leftrightarrow 4m - 5 = -1$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ (nhận)}$$

vậy $m = 1$

Câu 3: (2,0 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $2x^2 - (x-2)\sqrt{x^2 - x + 1} = 5x - 2$

b)
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 35 = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 4x + 9y = 0 \end{cases}$$

Lời Giải

a) Điều kiện xác định: $x^2 - x + 1 \geq 0$ (đúng $\forall x \in \mathbb{R}$)

$$2x^2 - (x-2)\sqrt{x^2 - x + 1} = 5x - 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = (x-2)\sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x-1) = (x-2)\sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2 - x + 1} = 2x - 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = 2 \text{ (nhận)}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 4x^2 - 4x$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 4x(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } S = \{0, 1, 2\}$$

b)

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 35 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3y^2 + 9y = 0 \end{cases}$$

Nhân hai vế của (2) với 3 ta được:

$$3(2x^2 - 4x + 3y^2 + 9y) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 9y^2 + 27y = 0$$

lấy (1) - (3) ta được:

$$x^3 - y^3 - 35 - 6x^2 + 12x - 9y^2 - 27y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - y^3 - 9y^2 - 27y - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^{2.2} + 3x.2^2 - 2^3 - y^3 - 3y^{2.3} - 3y.3^2 - 3^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 - (y+3)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3 = (y+3)^3$$

$$\Leftrightarrow x-2 = y+3$$

$$\Leftrightarrow x = y+5$$

$$(1) \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 25$$

Thay $x = y+5$ vào (4) ta được:

$$(y+5)^2 + y(y+5) + y^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 10y + 25 + y^2 + 5y + y^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 + 15y + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

• Với $y = -2$, ta có $x = 3$

• Với $y = -3$, ta có $x = 2$

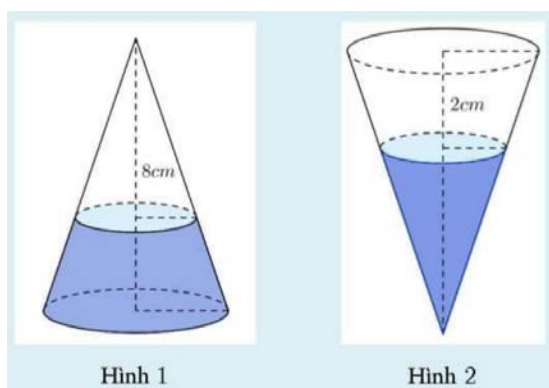
Vậy nghiệm của hệ là $(3; -2)$ và $(2; -3)$

Câu 4: (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình

$$x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 5 = 0.$$

b) Một bình nước có dạng hình nón và mực nước trong bình cách đỉnh bình 8 cm (minh họa như Hình 1). Khi đảo ngược bình lại thì phần không gian trống của bình có chiều cao 2 cm (minh họa như Hình 2). Tính chiều cao của bình.



Lời Giải

a)

$$x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 5 = 0 \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + 3x + xy - 2y^2 + 3y - x + 2y - 3 = 2$$

$$\Leftrightarrow x(x - 2y + 3) + y(x - 2y + 3) - (x - 2y + 3) = 2$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1)(x - 2y + 3) = 2$$

Do đó ta có bốn trường hợp:

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} x + y - 1 = 2 \\ x - 2y + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \text{ (Loại)}$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} x + y - 1 = 1 \\ x - 2y + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (Nhận)}$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} x + y - 1 = -1 \\ x - 2y + 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \text{ (Loại)}$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} x+y-1=-2 \\ x-2y+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ (Nhận)

Vậy cặp $(x; y)$ nguyên cần tìm là: $(1;1)$ và $(-2;1)$

b) Gọi:

- h là chiều cao bình chứa nước, r là bán kính mặt đáy
- Hình 1: $h_1 = 8$ là chiều cao phần không chứa nước, r_1 là bán kính đáy phần không chứa nước
- Hình 2: h_2 là chiều cao phần chứa nước, r_2 là bán kính đáy phần chứa nước ($h, r, h_1, r_1, h_2, r_2 \in \mathbb{R}$) và ($h, r, h_1, r_1, h_2, r_2 > 0$)

$$\frac{h_1}{h} = \frac{r_1}{r} \Rightarrow r_1 = \frac{h_1 \cdot r}{h} = \frac{8r}{h}$$

$$\frac{h_2}{h} = \frac{r_2}{r} \Rightarrow r_2 = \frac{h_2 \cdot r}{h} = \frac{(h-2) \cdot r}{h}$$

Thể tích phần chứa nước ở hình 2 là $V_1 = \frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3} \pi \frac{(h-2)^2 \cdot r^2}{h^2}$

Thể tích phần chứa nước ở hình 1 là $V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h - \frac{512 \pi r^2}{3h^2}$

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow h^3 - 512 = (h-2)^3$$

$$\Leftrightarrow h^2 - 2h - 84 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = 1 + \sqrt{85} \text{ (N)} \\ h = 1 - \sqrt{85} \text{ (L)} \end{cases}$$

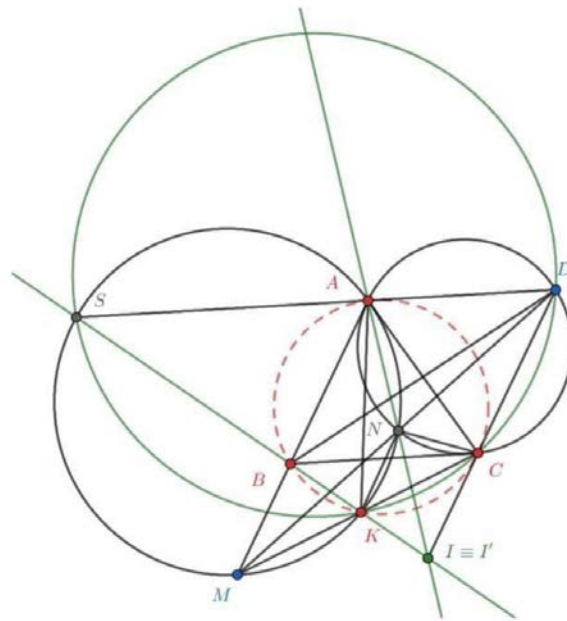
Vậy chiều cao của bình là $1 + \sqrt{85}$

Câu 5: (2,0 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ có $CB = CA$. Gọi M là điểm bất kỳ trên tia đối của tia BA . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường thẳng MD tại điểm N (N khác D), đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường thẳng MC tại điểm K (K khác M).

a) Chứng minh tứ giác $ABKC$ nội tiếp

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng BK . Chứng minh I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M thay đổi.

Lời Giải



a) Ta có:

$CA = CB$ mà $CB = DA$ ($ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow AC = AD \Rightarrow \triangle ACD$ cân

$\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$

Mà $\widehat{ACD} = \widehat{BAC}$ (so le trong)

$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ADC} \Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của (ADC)

Tương tự, ta có CD là tiếp tuyến của (ABC)

Ta có: $\widehat{AMN} = \widehat{NDC}$ (so le trong)

Mà $\widehat{NDC} = \widehat{NAC}$ ($ADCN$ nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{NAC} \Rightarrow AC$ là tiếp tuyến của (AMN)

Xét hai tam giác $\triangle AKC$ và $\triangle MAC$ có:

$\widehat{ACK}$ là góc chung

$\widehat{KMA} = \widehat{KAC}$ (vì AC là tiếp tuyến của (AMN))

$\Rightarrow \triangle AKC \sim \triangle MAC$ ($g - g$)

$\Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{MAC}$

Mà do $CA = CB$

$\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại C

$\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{ABC}$

Do đó, ta có $\widehat{AKC} = \widehat{ABC} (= \widehat{MAC})$

$\Rightarrow ABKC$ nội tiếp (đpcm)

b) Gọi S là giao điểm của BK và (AMN)

Ta có $\widehat{SAM} = \widehat{SKM}$

Mà $\widehat{SKM} = 180^\circ - \widehat{BKC} = \widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAD}$

$\Rightarrow \widehat{SAM} = 180^\circ - \widehat{BAD}$

$$\Rightarrow \widehat{SAM} + \widehat{BAD} = 180^\circ$$

$\Rightarrow S, A, D$ thẳng hàng

Khi đó, ta có:

$$\widehat{SDC} = \widehat{ACD} = \widehat{CAB} = \widehat{SKM}$$

$$\Rightarrow \widehat{SDC} = \widehat{SKM}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $SDCK$ nội tiếp

I là giao điểm AN và SK

Gọi I' là giao điểm của SK và CD

Khi đó, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{NKI}' = \widehat{SAN} \\ \widehat{NCI}' = \widehat{DAN} \\ \widehat{SAN} + \widehat{DAN} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{NKI}' + \widehat{NCI}' = 180^\circ$$

$\Rightarrow NKI'C$ nội tiếp

Vì $NKI'C$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KCI}' = \widehat{KNI}'$

Mà $\widehat{KCI}' = \widehat{DSK}$ (do $SDCK$ nội tiếp)

Mà $\widehat{DSK} = \widehat{ASK} = \widehat{KNI}$

Từ đây suy ra: $\widehat{KNI}' = \widehat{KNI} \Rightarrow I \equiv I'$

Do đó $I \in CD$, mà CD cố định

Vậy I thuộc đường thẳng CD cố định khi M thay đổi (đpcm)

Câu 6: (1,5 điểm)

a) Cho bảng ô vuông có kích thước 4×4 như sau

Mỗi ô trong bảng này được viết một số nguyên dương sao cho 16 số trên bảng đôi một khác nhau và trong mỗi hàng, mỗi cột luôn tồn tại một số bằng tổng của ba số còn lại tương ứng trong hàng, trong cột đó. Gọi M là số lớn nhất trong bảng. Tìm giá trị nhỏ nhất của M .

b) Cho a, b, c là các số thực dương không nhỏ hơn 1. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

Lời Giải

a) Gọi M là số lớn nhất trong 16 số trên bảng

Ta thấy tổng 4 số lớn nhất trong bảng không vượt quá tổng của 4 số $M, M-1, M-2, M-3$

Trong khi đó tổng của 12 số còn lại đạt được nhỏ nhất là tổng 12 số nguyên dương đầu tiên

Nên ta có $M + (M-1) + (M-2) + (M-3) \geq 1 + 2 + 3 + \dots + 12 = 78$

$$\Leftrightarrow 4M \geq 84$$

$$\Leftrightarrow M \geq 21$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của M là 21

Xây dựng mô hình:

21	11	6	4
12	20	3	5
8	2	19	9
1	7	10	18

b) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \leq \frac{\sqrt{ab-1}}{2\sqrt{bc}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{c} - \frac{1}{bc}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{c} \left(a - \frac{1}{b} \right)}$$

Lại theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{c} \left(a - \frac{1}{b} \right)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{c} + a - \frac{1}{b}}{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + a - \frac{1}{b} \right)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \begin{cases} \frac{\sqrt{ab-1}}{\sqrt{bc-c}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + a - \frac{1}{b} \right) \\ \frac{c+a}{a} \left(\frac{1}{a} + b - \frac{1}{c} \right) \\ \frac{\sqrt{ca-1}}{4} \left(\frac{1}{b} + c - \frac{1}{a} \right) \end{cases}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leq \frac{a+b+c}{4} \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{2}$

----- Hết -----