

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH
NĂM HỌC 2024 – 2025**

Môn thi: TOÁN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**Thời gian làm bài: 150 phút
(Không kể thời gian giao đề)**

Câu 1:

a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $40a + 20b = 30b + 15c = 24c + 12a$. Chứng minh

$$a + b = c$$

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Tính giá trị của biểu thức $P = (a-3)^{2024} + (b-3)^{2024} + (c-3)^{2024}$

Câu 2:

a) Giải phương trình $4x^3 + 31x^2 - 27 = 12(x^2 + x)\sqrt{1-x}$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)(4x+y) = 5x+2y-1 \\ 2x^2 - 5x + 2\sqrt{x+y} - \sqrt{3x-1} = 0 \end{cases}$$

Câu 3:

a) Cho phương trình $x^4 + x^2(ax + a - 1) + ax = 2 - a$ (a là tham số). Chứng minh rằng nếu a khác 2 và tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là số nguyên thì $2a^2 - 6a + 9$ là hợp số

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1) = 3abc$

Câu 4: Cho đường tròn (O) . Từ điểm A nằm ngoài đường tròn, vẽ các tiếp tuyến AE, AF tới đường tròn (O) (E, F là các tiếp điểm) và cát tuyến ABC (B, C thuộc đường tròn (O) , B nằm giữa A và C).

a) Chứng minh rằng $BE \cdot CF = CE \cdot BF$

b) Gọi H là giao điểm của AO và EF , I là trung điểm của BC . Đường thẳng đi qua I song song với CE cắt EF tại D , CD cắt AE tại K . Chứng minh HK vuông góc với OF .

c) Trong tam giác FBC lấy điểm N sao cho $AN = AF$. Qua điểm N vẽ các dây cung BQ, CR, FP của đường tròn (O) . Chứng minh rằng tam giác PQR là tam giác cân.

Câu 5: Cho a, b, c là các số thực không âm, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{4}{ab+bc+ca}$$

Câu 6: Trong hình lục giác đều có cạnh bằng 4 cho 257 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại hình vuông có cạnh bằng 1 chứa ít nhất 5 điểm (có thể thuộc cạnh hình vuông) trong số các điểm đã cho.

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) Ta có: $40a + 20b = 30b + 15c$

$$\Rightarrow 40a - 10b = 15c$$

$$\Rightarrow 8a - 2b = 3c$$

Ta có: $30b + 15c = 24c + 12a$

$$\Rightarrow 12a - 30b = -9c$$

$$\Rightarrow 4a - 10b = -3c$$

Do đó ta có $\begin{cases} 12a - 12b = 0 \\ 8a - 2b = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ 8a - 2a = 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 2a \end{cases} \Rightarrow a + b = c$

b) Ta có: $\begin{cases} a + b + c = 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c) = 12 - 4 \cdot 6$

$$\Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)^2 = (b - 2)^2 = (c - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = 2$$

$$\Rightarrow P = 3$$

Câu 2:

a) ĐK: $x \leq 1$

Phương trình đã cho tương đương

$$(x + 1)(4x^2 + 27x - 27 - 12x\sqrt{1 - x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 4x^2 + 27x - 27 - 12x\sqrt{1 - x} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Giải (2) ta có: $(2x - 9\sqrt{1 - x})(2x + 3\sqrt{1 - x}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 9\sqrt{1-x} \\ 2x = -3\sqrt{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 + 81x - 81 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ 4x^2 + 9x - 9 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{-81 \pm 9\sqrt{97}}{8} \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ \begin{cases} x = \frac{3}{4} (l) \\ x = -3 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-81 + 9\sqrt{97}}{8} \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{-81 + 9\sqrt{97}}{8}; -1; -3 \right\}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (x+y)(4x+y) = 5x+2y-1(1) \\ 2x^2 - 5x + 2\sqrt{x+y} - \sqrt{3x-1} = 0(2) \end{cases}, \text{Đk: } \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x+y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } (1) \Leftrightarrow 4x^2 + 5x(y-1) + (y-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x+y-1)(x+y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x+1 \\ y = -x+1 \end{cases}$$

$$\text{TH1: Nếu } y = -4x+1 \text{ thì } x+y = -3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Mà } x \geq \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{Thử lại } x = \frac{1}{3} \text{ không thỏa mãn}$$

$$\text{TH2: Nếu } y = -x+1 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = \sqrt{3x-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \\ (2x^2 - 5x + 2)^2 = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \right. \\ \left. x \geq 2 \right. \\ \left. 4x^4 - 20x^3 + 33x^2 - 23x + 5 = 0 \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \right. \\ \left. x \geq 2 \right. \\ \left. (x^2 - 3x + 1)(4x^2 - 8x + 5) = 0 \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \right. \\ \left. x \geq 2 \right. \\ \left[\begin{aligned} x &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} x &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ y &= -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned} \right. \\ \left[\begin{aligned} x &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ y &= -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm $(x, y) \in \left\{ \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right); \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$

Câu 3:

Ta có: $x^4 + x^2(ax + a - 1) + ax = 2 - a$

$$\Leftrightarrow x^2(x + 1) + ax(x^2 + 1) - 2(x^2 + 1) + a(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 + ax + a - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + ax + a - 2 = 0 \text{ (vì } x^2 + 1 > 0 \text{)}$$

Ta có: $\Delta = a^2 - 4a + 8 > 0, \forall a$

Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi a

Vì $a \neq 2 \Rightarrow x \neq 0$

Khi đó, theo hệ thức Viet ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = a - 2 \end{cases} &\Rightarrow 2a^2 - 6a + 9 = a^2 + (a - 3)^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - 1)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + 1 \\ &= (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) \end{aligned}$$

Vì x_1, x_2 là các số nguyên và $x_1 \neq x_2$ nên $\begin{cases} x_1^2 + 1 \neq 1 \\ x_2^2 + 1 \neq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$ là hợp số hay $2a^2 - 6a + 9$ là hợp số.

b) Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$

$$(a+1)(b+1)(c+1) = 3abc \quad (1)$$

Nếu $c = 1$ thì $2ab + 2a + 2b = 3ab$

$$\Leftrightarrow ab - 2a - 2b + 4 = 6$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5, b = 4 \\ a = 8, b = 3 \end{cases}$$

Nếu $c = 2$ $\Leftrightarrow ab + a + b + 1 = 2ab$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 2$$

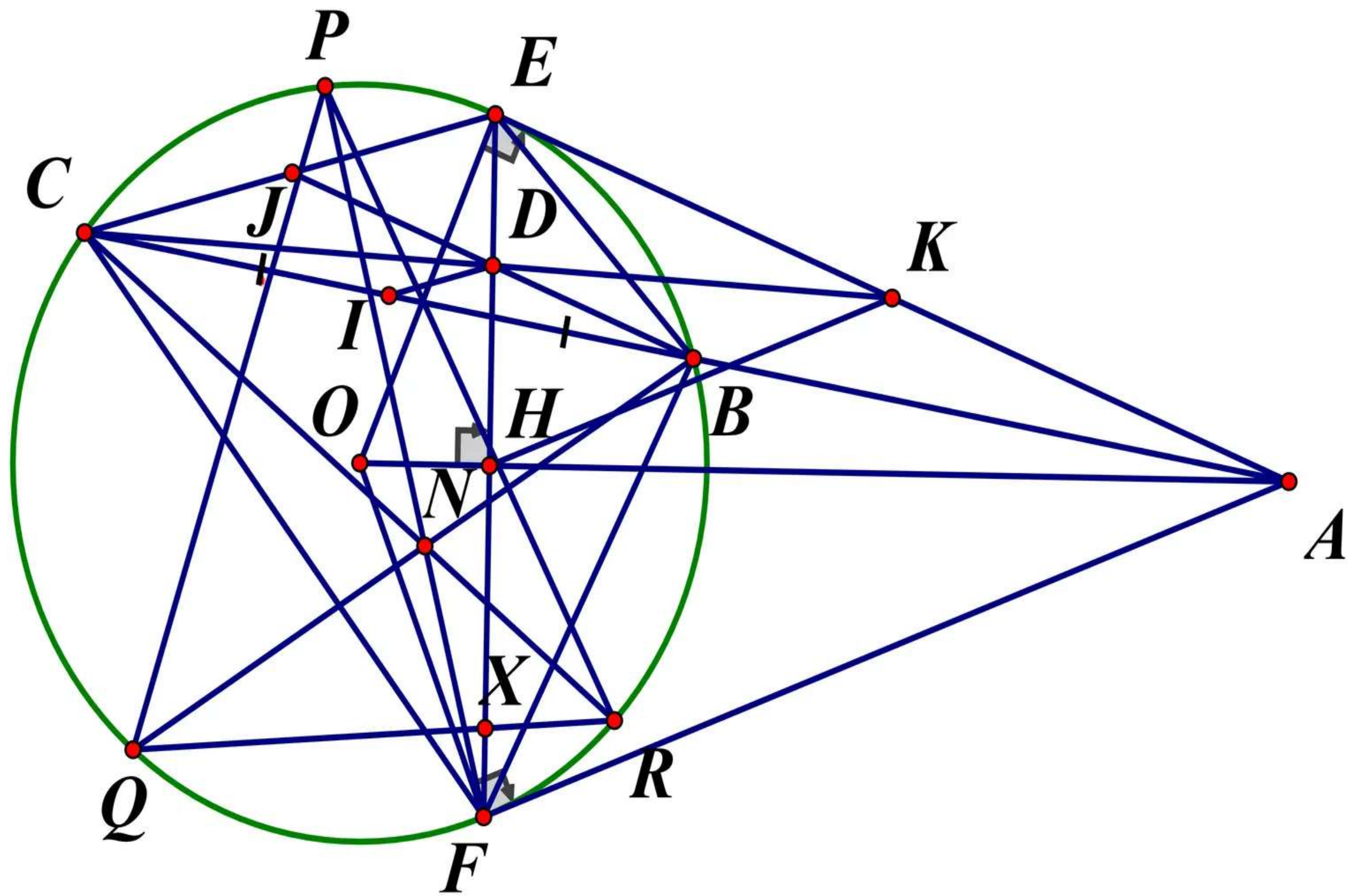
$$\Rightarrow a = 3, b = 2$$

Nếu $c \geq 3$ khi đó $(1) \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{abc}$

$$< 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \cdot 3 + \frac{1}{3^3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27} = \frac{37}{27} < 2 \quad (l)$$

Vậy $(a, b, c) \in \{(5; 4; 1); (8; 3; 1); (3; 2; 2)\}$ và các hoán vị

Câu 4:



a) $\triangle AEB \sim \triangle ACE (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{AE}{AC}$$

$\triangle AFB \sim \triangle ACF (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{BF}{CF} = \frac{AF}{AC}$$

Do $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{BF}{CF}$

$$\Rightarrow BE \cdot CF = CE \cdot BF$$

b) Do $ID \parallel CE$ nên $\angle DIB = \angle ECB = \angle DFB$

$$\Rightarrow \text{IDBF nội tiếp}$$

OB cắt CE tại J, 5 điểm O, I, E, A, F thuộc 1 đường tròn

$$\Rightarrow \angle DBI = \angle IFD = \angle IAE$$

Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow BJ \parallel EA$

ID // CJ, I là trung điểm của CB

$\Rightarrow$ JD là đường trung bình của tam giác CJB

$\Rightarrow JD = DB$

Mà BJ // EA theo Thales $\frac{JD}{EK} = \frac{DB}{KA} \Rightarrow EK = KA$

$\Rightarrow$ HK là đường trung bình của tam giác EFA

$\Rightarrow HK // FA$

Mà $OF \perp FA \Rightarrow HK \perp OF$

c) $\Delta AFB \sim \Delta ACF (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow AF^2 = AB \cdot AC$$

Suy ra $AN^2 = AF^2 = AE^2 = AB \cdot AC \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AN}$

$\Rightarrow \Delta ANB \sim \Delta ACN (c - g - c)$

$\Rightarrow BNA = NCA = BQB$

$\Rightarrow NA // QR$

Gọi X là giao của QR và PF, tam giác ANF cân

$$\frac{1}{2}(sd PQ + sd RF) = RXF = ANF = AFN = \frac{1}{2}sd PF = \frac{1}{2}(sd PR + sd RF)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}sd PQ = \frac{1}{2}sd PR \Rightarrow sd PQ = sd PR \Rightarrow PQ = PR$$

$\Rightarrow$ Tam giác PQR cân tại P

Câu 5:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$

$$\Rightarrow \frac{1}{(b-c)^2} \geq \frac{1}{b^2}; \frac{1}{(c-a)^2} = \frac{1}{(a-c)^2} \geq \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{ab} \geq \frac{4}{ab+bc+ca}$$

Cần chứng minh $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{ab}$

$$\text{Hay là } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2} \geq 4 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{(a-b)^2}{ab} + 2 > 2 \text{ vì } a \neq b$$

$$(1) \text{ trở thành } t + \frac{1}{t-2} \geq 4$$

$$\text{Hay là } t^2 - 2t + 1 \geq 4t - 8 \Leftrightarrow (t-3)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ đpcm

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \\ c = 0 \end{cases}$$

Câu 6:

Gọi (O) ngoại tiếp lục giác đều cạnh 4

Khi đó (O) có bán kính $R = 4$

Gọi ABCD là hình vuông ngoại tiếp (O)

$\Rightarrow$ Cạnh hình vuông là 8

Chia hình vuông thành 64 hình vuông nhỏ cạnh bằng 1

Có 257 điểm phân biệt mà có 64 hình vuông

Theo nguyên lý Dirichle tồn tại 1 hình vuông cạnh bằng 1 chứa ít nhất 5 điểm trong số các điểm đã cho.