

ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN TỈNH BẾN TRE NĂM 2023-2024
MÔN TOÁN CHUYÊN

Câu 1. (2 điểm):

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)$, với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A \geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}$?

Câu 2. (2 điểm):

a) Giải phương trình $(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 4x - 12}) = 8$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{x} \\ x + y - \frac{4}{x} = \frac{4y}{x^2} \end{cases}$$

Câu 3. (2 điểm):

Cho Parabol $y = \frac{1}{2}x^2$ (P), đường thẳng (d): $y = -\frac{2}{m}x + 2$ với $m \neq 0$ và điểm I(0;2)

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt.

b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK là tam giác vuông.

c) Chứng minh rằng độ dài của đoạn thẳng AB lớn hơn 4

Câu 4. (1 điểm) Cho số thực x thỏa mãn $0 < x < \frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{2-x}{1-2x} + \frac{1+2x}{3x}$$

Câu 5. (3 điểm):

Cho tam giác ABC không có góc tù ($AB < AC, BC < 2R$) nội tiếp đường tròn (O;R) (B, C cố định, A di động trên cung lớn BC). Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. Từ M kẻ đường thẳng song song với AB, đường thẳng này cắt (O) tại D và E ($D \neq E, D$ thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại F và cắt AC tại I.

a) Chứng minh rằng MBIC là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng FI.FM = FD.FE

c) Tìm vị trí của điểm A trên cung lớn BC sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. . Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) \\
 &= \left(\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}}{x-1} \right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}}{x-1} \right) \\
 &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

a) Ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned}
 A \geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}} &\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}} \Rightarrow \sqrt{2023x} + \sqrt{2023} \geq \sqrt{x} + \sqrt{2023x} \\
 &\Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{2023} \Rightarrow x \leq 2023
 \end{aligned}$$

b) Kết hợp với điều kiện xác định ban đầu, ta được $1 < x \leq 2023 (x \in \mathbb{Z})$.

Vậy có 2022 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bình luận – đây là một bài rút gọn biểu thức đơn giản; ở ý a), ta chỉ cần thực hiện các phép tính toán thật cẩn thận để ra kết quả đúng, còn ở ý b), ta cần lưu ý điều kiện xác định để có thể tìm được đúng tập các giá trị x thỏa mãn.

Câu 2. a) Điều kiện xác định $\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x^2+4x-12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

Phương trình ban đầu tương đương

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2})(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2+4x-12}) &= 8(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2}) \\
 \Leftrightarrow 8(1 + \sqrt{x^2+4x-12}) &= 8(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 4x - 12} = \sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} \\
&\Leftrightarrow \left(1 + \sqrt{x^2 + 4x - 12}\right)^2 = \left(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow 1 + x^2 + 4x - 1 + 2\sqrt{x^2 + 4x - 12} = x + 6 + x - 2 + 2\sqrt{x^2 + 4x - 12} \\
&\Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(TM) \\ x = -5(loại) \end{cases}
\end{aligned}$$

Bình luận – Áp dụng các kĩ thuật thường gặp đối với bài toán phương trình vô tỉ, ta có các cách đánh giá hết sức tự nhiên để dẫn đến lời giải của bài toán:

- i) Ta thấy nếu nhân lương liên hợp thì có $(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2}) = x + 6 - x + 2 = 8$ nên ta mới đi nhân hai vế cho lượng $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2}$ để triệt tiêu 8 ở hai vế của phương trình.

ii) Để ý rằng $(x+6)(x-2) = x^2 + 4x - 12$ nên khi bình phương hai vế sẽ triệt tiêu được lượng $2\sqrt{x^2 + 4x - 12}$ để đưa về 1 phương trình đơn giản hơn.

Đây là 1 phương trình vô tỉ không quá khó trong việc phân tích, đánh giá, tuy nhiên cần lưu ý về việc loại và nhận nghiệm dựa vào điều kiện xác định.

b) Điều kiện xác định: $x^2 + y^2 \neq 0$

Ta có $(2) \Leftrightarrow x + y = \frac{4}{x^2}(x + y) \Leftrightarrow (x + y)\left(\frac{4}{x^2} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ \frac{4}{x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

- Với $x = -y$, thay vào (1), ta được

$$\frac{1}{y} = -\frac{9}{y} \Rightarrow \frac{10}{y} = 0 \text{ (vô lý).}$$

- Với $x = 2$, thay vào (1), ta được

$$y + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} - 2 \Rightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(TM) \\ y = 2(TM) \end{cases}$$

- Với $x = -2$, thay vào (1), ta được $y + \frac{1}{y} = -\frac{9}{2} + 2 \Rightarrow 2y^2 + 5y + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}(TM) \\ y = -2(TM) \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \left\{ (2; 2), (-2; -2), \left(2; \frac{1}{2}\right), \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \right\}$

Câu 3. (2 điểm):

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{2}{m}x + 2, m \neq 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{m}x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{4}{m}x - 4 = 0$$

Do $\Delta'_x = \frac{4}{m^2} + 4 > 0, \forall m \neq 0$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt.

Mặt khác, số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của (P) và (d).

Vậy đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm A, B phân biệt.

b) Ta đặt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ hay $A\left(x_1; \frac{1}{2}x_1^2\right), B\left(x_2; \frac{1}{2}x_2^2\right)$. Khi đó $H(x_1; 0), K(x_2; 0)$.

Áp dụng Viète cho phương trình (1) với 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4}{m} \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$

$$\text{Ta tính được } \begin{cases} HK^2 &= (X_2 - X_1)^2 = (X_1 + X_2)^2 - 4X_1X_2 = \frac{16}{m^2} + 16 \\ IH^2 &= (X_1 - 0)^2 + (0 - 2)^2 = X_1^2 + 4 \\ IK^2 &= (X_2 - 0)^2 + (0 - 2)^2 = X_2^2 + 4 \\ IH^2 + IK^2 &= X_1^2 + X_2^2 + 8 = (X_1 + X_2)^2 - 2X_1X_2 + 8 = \frac{16}{m^2} + 16 \end{cases}$$

Suy ra $HK^2 = IH^2 + IK^2$, hay tam giác IHK vuông tại I.

c) Ta đi chứng minh $AB^2 > 16$ với mọi $m \neq 0$. Thật vậy,

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2(x_2 - x_1)^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + \left[1 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2\right]$$

$$= \left(\frac{16}{m^2} + 16 \right) \left(1 + \frac{4}{m^2} \right)$$

$$= \frac{64}{m^4} + \frac{80}{m^2} + 16 > 16, \forall m \neq 0$$

Bình luận – Mấu chốt của bài toán là áp dụng định lý Vi-ét và công thức tính độ dài của đoạn thẳng từ hai điểm có tọa độ cho trước. Ta chú ý tính toán và biến đổi thật kĩ lưỡng để đảm bảo độ chính xác

Câu 4.

Đặt $a = \frac{1}{x}, a > 2$. Khi đó $A = \frac{2 - \frac{1}{a}}{1 - \frac{2}{a}} + \frac{1 + \frac{2}{a}}{\frac{3}{a}} = \frac{2a-1}{a-2} + \frac{a+2}{3} = 2 + \frac{3}{a-2} + \frac{a-2}{3} + \frac{4}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương $\frac{3}{a-2}$ và $\frac{a-2}{3}$, ta được

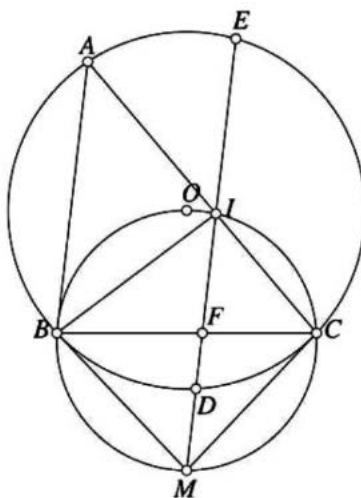
$$A \geq 2 + 2\sqrt{\frac{3}{a-2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{a-2}{3}} + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$.

Bình luận – Ta biến đổi khéo léo biểu thức đề bài để áp dụng được bất đẳng thức AM – GM.
Một số bài toán tương tự:

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{1}{a} + \frac{a}{1-a}, 0 < a < 1$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{1}{x} + \frac{xy^2}{x-y}, 0 < x < y$

Câu 5.



Lời giải.

- a) Do MB thuộc tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) và $MI \parallel AB$ nên ta có

$$\widehat{MBC} = \widehat{BAC} = \widehat{MIC}.$$

Do đó, MIBC là tứ giác nội tiếp.

- b) Ta có $\triangle BFI \sim \triangle MFC$ (g.g) vì
$$\begin{cases} \widehat{BFI} = \widehat{MFC} \text{ (đôi đỉnh)} \\ \widehat{BIF} = \widehat{MCF} \text{ (cùng chắn cung BM)} \end{cases}$$

Từ đây suy ra

Tương tự với cặp tam giác BFE và DFC, ta cũng có $FB.FC = FD.FE$

Suy ra $FI.FM = FD.FE$.

- c) Ta có

$$S_{IBC} = \frac{1}{2}.BC.d(I, BC).$$

Do B và C là hai điểm cố định nên độ dài của đoạn BC không đổi nên S_{IBC} có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi $d(I, BC)$ đạt giá trị lớn nhất.

Mặt khác, do MB và MC lần lượt là hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) nên $\widehat{MOB} = \widehat{MCO} = 90^\circ$, tức là tứ giác MBOC nội tiếp đường tròn đường kính OM (gọi là đường tròn $\mathcal{C}$), lại có MBIC là tứ giác nội tiếp 5 điểm M, B, O, I, C cùng thuộc một đường tròn cố định $\mathcal{C}$ (do O, M cố định).

Lại có $OB = OC = R$ nên O là điểm chính giữa cung BC của $\mathcal{C}$, vì I di chuyển trên cung này nên $d(I, BC) \leq d(O, BC) = \text{const}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I \equiv O$, hay A, O, C thẳng hàng.

Vậy khi A là giao điểm của OC và (O) thì tam giác IBC có diện tích lớn nhất.

Bình Luận - Đối với ý b), nếu học sinh đã được làm quen với “phương tích của một điểm đối với đường tròn” thì ý này sẽ rất dễ dàng, dù vậy cách tiếp cận bằng tam giác đồng dạng cũng rất dễ nhận ra. Ý c) có thể xem là câu hỏi “lấy điểm 10” của đề; đối với dạng cực trị hình học như này, ta có thể tiến hành phân tích như sau:

- i. Ta có $S_{IBC} = \frac{1}{2}.BC.d(I, BC)$ mà $BC = \text{const}$ nên ta chỉ cần biện luận vị trí của I để $d(I, BC)$ lớn nhất.
- ii. Dựa vào các thành phần cố định, ta đi tìm quỹ tích của điểm I và tiếp hành lý luận để dẫn đến lời giải cho bài toán.