

**Lời giải: Nguyễn Ngọc Hùng – THCS Hoàng Xuân Hãn – Đức Thọ - Hà Tĩnh**

**I- PHẦN GHI KẾT QUẢ** (Thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi)

**Câu 1.** Cho  $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = a^3 + 3a + 2022$

**Gợi ý:** Ta có  $a^3 = \frac{1}{2-\sqrt{3}} - (2-\sqrt{3}) - 3a \Leftrightarrow a^3 + 3a = 2\sqrt{3} \Rightarrow P = 2\sqrt{3} + 2022$

**Câu 2.** Tính giá trị của biểu thức  $A = \left( \frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left( x - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \right)$  khi  $x = 2022$

**Gợi ý:** Ta có  $A = \frac{2x+1-\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \cdot (x-\sqrt{x}-2) = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) = \sqrt{x}-2$   
 $\Rightarrow A = \sqrt{2022} - 2$

**Câu 3.** Cho các số  $x, y, z$  thỏa mãn  $x; y \neq 0$  và  $\begin{cases} 2x+y=2z \\ 3x-y=5z \end{cases}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{2x^2-3xy}{x^2+2y^2}$

**Gợi ý:** Ta có  $\begin{cases} 2x+y=2z \\ 3x-y=5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=7z \\ y=3x-5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7z}{5} \\ y=-\frac{4z}{5} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{182}{81}$

**Câu 4.** Giải phương trình  $2\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{3x-2} + 3$

**Gợi ý:** ĐKXD:  $x \geq \frac{2}{3}$ . Ta có  $2\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{3x-2} + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x\sqrt{3x-2} - (3x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - \sqrt{3x-2})(2x + \sqrt{3x-2}) = 0$ . Vì  $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 2x + \sqrt{3x-2} > 0$

Do đó  $x = \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$  (TMĐK)

Phương trình có tập nghiệm  $S = \{1; 2\}$

**Câu 5.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + 2y(x+1) = x^2 - 8y^2 \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x-1} = x - 2y \end{cases}$$

**Gợi ý:** ĐKXD:  $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ . Ta có  $x + 2y(x+1) = x^2 - 8y^2 \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 - (x+2y) - 4y^2 - 2xy = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x+2y) - (x+2y) - 2y(x+2y) = 0 \Leftrightarrow (x+2y)(x-4y-1) = 0$$

Vì  $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x+2y > 0$ . Do đó  $x = 4y+1$  thay vào phương trình  $x\sqrt{y} - y\sqrt{x-1} = x - 2y$

$$\text{được } (4y+1)\sqrt{y} - y\sqrt{4y} = 4y+1-2y \Leftrightarrow (2y+1)(\sqrt{y}-1) = 0 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 \Leftrightarrow y = 1$$

(Vì  $2y+1 > 0$ ). Hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (5; 1)$

**Câu 6.** Tìm bốn chữ số tận cùng của  $5^{2022}$  viết trong hệ thập phân

**Gợi ý:** Ta có  $5^8 - 1 = (5^4 - 1)(5^4 + 1) = 16.39(5^4 + 1):16$ .

Do đó  $5^{2022} = 5^6 \cdot (5^8)^{252} = 5^6 \cdot (5^8 - 1)^{252} + 5^6 \equiv 5^6 \pmod{10000}$ . Mà  $5^6 = 15625$

Do đó 4 chữ số tận cùng là 5625

**Câu 7.** Cho hình vuông cạnh  $2a$  và hai nửa đường tròn bán kính cùng bằng  $a$ , tiếp xúc với nhau như hình vẽ. Một đường tròn (I) tiếp xúc với hai nửa đường tròn đã cho và tiếp xúc với cạnh hình vuông. Tính diện tích hình tròn (I)

**Gợi ý:** Gọi điểm tiếp xúc của 2 nửa đường tròn là E

Hình vuông ABCD, đường tròn (I) tiếp xúc với AD tại P cắt PE tại Q và tiếp xúc với nửa đường tròn (O) tại N. Kẻ tiếp tuyến chung của đường tròn (I) và đường tròn (O) cắt AD tại M. Ta có  $MP = MN = MD$  nên  $\triangle PND$  vuông tại N

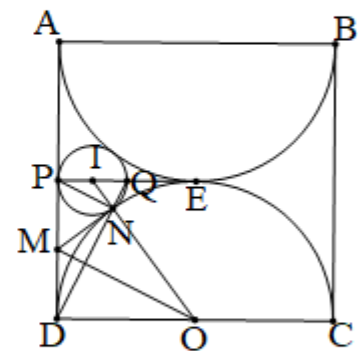
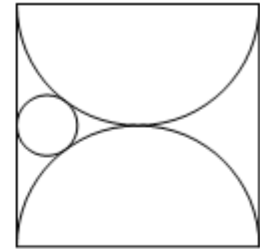
$\widehat{PNQ} = 90^\circ$  suy ra D, N, Q thẳng hàng. Dễ dàng chứng minh

được DPEO là hình vuông. Xét  $\triangle DPQ$  và  $\triangle ODM$  có

$$\widehat{DPQ} = \widehat{ODM} = 90^\circ; DP = OD; \widehat{PDQ} = \widehat{DOM}$$

$$\Rightarrow \triangle DPQ = \triangle ODM \Rightarrow PQ = MD = \frac{PD}{2} = \frac{AD}{4} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow PI = \frac{a}{4}. \text{ Suy ra diện tích hình tròn (I) là } \frac{\pi a^2}{16}$$



**Câu 8.** Cho đường thẳng (d):  $y = m(x-2) + 3$  với  $m \neq 0$ ;  $m \neq \frac{3}{2}$ . Biết rằng đường thẳng (d) luôn cắt

trục tọa độ Ox và Oy tại hai điểm A, B phân biệt. Tính giá trị nhỏ nhất của  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

**Gợi ý:** Gọi  $I(x_0; y_0)$  là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m.

Khi đó ta có  $y_0 = m(x_0 - 2) + 3 \Leftrightarrow m(x_0 - 2) + 3 - y_0 = 0$  với mọi m. Suy ra  $\begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ 3 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{cases}$

Suy ra tọa độ điểm  $I(2; 3)$ . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến AB.

Áp dụng hệ thức lượng ta có  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OH^2} \geq \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{13}$ .

Vậy GTNN của  $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{13}$

**Câu 9.** Cho tam giác nhọn ABC cân tại A, đường cao AD, trực tâm H. Biết AH = 49cm, BH = 14cm. Tính độ dài đoạn AD.

**Gợi ý:** Gọi E là giao điểm của BH với AC

Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Dễ dàng chứng minh được BHCK là hình thoi.

Ta có  $\widehat{BAH} + \widehat{BKH} = \widehat{CAH} + \widehat{BHK} = \widehat{CAH} + \widehat{AHE} = 90^\circ$

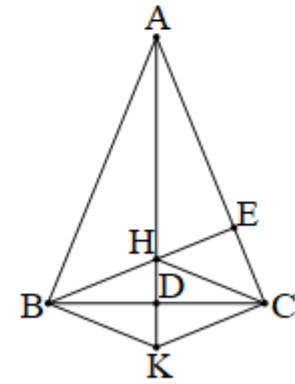
$\Rightarrow \widehat{ABK} = 90^\circ$  hay  $\triangle ABK$  vuông tại B.

Ta có  $BH^2 = BK^2 = KD \cdot KA$ . Đặt  $HD = x > 0 \Rightarrow KD = x$

Suy ra  $x(AH + 2x) = 14^2 \Leftrightarrow x(49 + 2x) = 196$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 49x - 196 = 0 \Leftrightarrow (x + 28)(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

Do đó  $AD = 49 + \frac{7}{2} = \frac{105}{2}$  cm



**Câu 10.** Trên bảng có 2022 số tự nhiên khác nhau từ 1 đến số 2022. Lần thứ nhất xóa đi 2 số bất kì và viết tổng của chúng lên bảng, lúc này trên bảng còn 2021 số. Lần thứ hai xóa đi 2 số bất kì và viết tổng của chúng lên bảng và cứ tiếp tục như vậy. Hỏi lần thứ 2021, trên bảng còn lại số nào?

**Gợi ý:** Mỗi lần xóa đi hai số a, b lại viết lên bảng số bằng a + b nên tổng các số trên bảng không thay đổi. Do đó sau 2021 lần thực hiện thì trên bảng còn số

$$1 + 2 + \dots + 2022 = \frac{2022 \cdot 2023}{2} = 2045253$$

## II- PHẦN TỰ LUẬN (Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)

**Câu 11.** Giải phương trình nghiệm nguyên  $x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 4y^2 + 32x + 4y + 39 = 0$

**Giải:** Ta có  $x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 4y^2 + 32x + 4y + 39 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 (x^2 - 2x + 10) = (2y - 1)^2$

Suy ra  $x^2 - 2x + 10$  là số chính phương.

Đặt  $x^2 - 2x + 10 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - (x - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow (|a| - |x - 1|)(|a| + |x - 1|) = 9$  với  $a \in \mathbb{Z}$ .

Do  $|a| + |x - 1| \geq |a| - |x - 1|$  và  $|a| + |x - 1| > 0$  nên chỉ xảy ra các trường hợp sau:

$$\text{TH1. } \begin{cases} |a| + |x - 1| = 9 \\ |a| - |x - 1| = 1 \end{cases} \Rightarrow |x - 1| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 4 \\ x - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 5 \Rightarrow (2y - 1)^2 = 1225 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 1 = 35 \\ 2y - 1 = -35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 18 \\ y = -17 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -3 \Rightarrow (2y - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 1 = 5 \\ 2y - 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\text{TH2. } \begin{cases} |a| + |x-1| = 3 \\ |a| - |x-1| = 3 \end{cases} \Rightarrow |x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow (2y-1)^2 = 81 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-1=9 \\ 2y-1=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ y=-4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm  $(x; y) \in \{(-3; 3); (-3; 2); (1; 5); (1; -4); (5; -17); (5; 18)\}$

**Câu 12.** Cho đường tròn (O) đường kính BC và điểm A di động trên đường tròn (O) (A khác B và C). Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến cạnh BC của tam giác ABC. Gọi D là trung điểm của HC. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với AD cắt AB tại E.

a) Chứng minh rằng  $HD \cdot HE = AD \cdot AH$

b) Chứng minh rằng B là trung điểm của AE. Tìm quỹ tích điểm E.

**Giải:** a) Ta có  $\widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{AEH}$

và  $\widehat{ACD} = \widehat{BAH} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle EHA$  (g - g)

$$\Rightarrow \frac{DC}{AH} = \frac{AD}{HE} \Rightarrow DC \cdot HE = AD \cdot AH \Rightarrow HD \cdot HE = AD \cdot AH$$

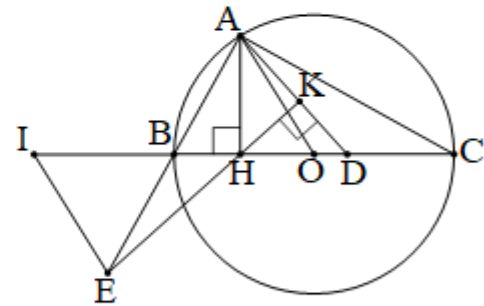
b) Ta có  $\triangle AHC \sim \triangle BAC$  (g - g)  $\Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AC}{CH}$

$$\Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{AC}{AB} \text{ . Mặt khác } \triangle ADC \sim \triangle EHA$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{AH} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{2DC}{AH} = \frac{2AC}{AE} \Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{2AC}{AE} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{2AC}{AE} \Rightarrow AE = 2AB$$

hay B là trung điểm của AE

Gọi I là điểm đối xứng với O qua B. Ta có  $\triangle IBE = \triangle OBA$  (c - g - c)  $\Rightarrow IE = OA$  không đổi  
Vì O, B cố định nên I cố định. Do đó điểm E chạy trên đường tròn (I; OA)



**Câu 13.** Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn  $ab + a + b = 3$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} - \frac{1}{\sqrt{a+b+2}} - \frac{a^2+b^2}{3}$

**Giải:** Ta có  $a + b = 3 - ab \geq 3 - \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow (a+b)^2 + 4(a+b) - 12 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a+b-2)(a+b+6) \geq 0 \Leftrightarrow a+b \geq 2.$$

Mặt khác  $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a+b)^2 + 2(a+b) - 6$

$$\text{Do đó } P = \frac{a^2+b^2+a+b}{ab+a+b+1} - \frac{1}{\sqrt{a+b+2}} - \frac{a^2+b^2}{3} = \frac{a^2+b^2+a+b}{4} - \frac{1}{\sqrt{a+b+2}} - \frac{a^2+b^2}{3}$$

$$= \frac{a+b}{4} - \frac{1}{\sqrt{a+b+2}} - \frac{a^2+b^2}{12} = \frac{a+b}{4} - \frac{1}{\sqrt{a+b+2}} - \frac{(a+b)^2 + 2(a+b) - 6}{12}$$

$$= -\frac{(a+b)^2}{12} + \frac{4(a+b)}{12} - \frac{4}{12} - \frac{3(a+b+2)}{12} - \frac{4}{\sqrt{a+b+2}} + \frac{3}{\sqrt{a+b+2}} + \frac{4}{3}$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cauchy ta có } \frac{3(a+b+2)}{12} + \frac{4}{\sqrt{a+b+2}} = \frac{3}{12} \left( a+b+2 + \frac{8}{\sqrt{a+b+2}} + \frac{8}{\sqrt{a+b+2}} \right)$$

$$\geq \frac{3}{12} \cdot 3 \sqrt{(a+b+2) \cdot \frac{8}{\sqrt{a+b+2}} \cdot \frac{8}{\sqrt{a+b+2}}} = 3. \text{ Do đó}$$

$$P = -\frac{(a+b-2)^2}{12} - \frac{3(a+b+2)}{12} - \frac{4}{\sqrt{a+b+2}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+2}} + \frac{1}{24} \leq -3 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{6}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng  $-\frac{1}{6}$ . Đạt được khi  $a = b = 1$