

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Cho $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - 27} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right)$. Tìm điều kiện xác định của A

và tính giá trị của A khi $x = \sqrt{3} + 2020$

b) Tính giá trị của biểu thức $B = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$

Bài 2. (1,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2x - 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Không giải phương trình hãy tính giá trị các biểu thức

a) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$ b) $\frac{x_1}{x_2^2 + 2x_2} + \frac{x_2}{x_2^2 + 2x_1}$

Bài 3. (1,5 điểm)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + xy + y = 11 \end{cases}$

b) Giải phương trình: $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$

Bài 4. (1,5 điểm)

a) Cho $P = 2 \cdot 6^{2n} + 6^n - 3$, chứng minh rằng P chia hết cho 25 với mọi số tự nhiên n

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình; $x^2 - xy + y^2 - 4 = 0$

Bài 5. (1,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH, D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên AB, AC. Biết $BH = 4cm, HC = 9cm$

a) Tính DE

b) Các đường thẳng vuông góc với DE tại D và E cắt BC tại M và N. Tính S_{DENM}

Bài 6. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$), có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm nằm trên cung nhỏ AC sao cho $MA < MC$. Vẽ MH vuông góc với

BC tại H, MI vuông góc với AC tại I (3 điểm I, M, B không thẳng hàng)

a) Chứng minh $\widehat{HIM} = \widehat{ICM}$

b) Chứng minh $\triangle BMA \sim \triangle HMI$

c) Gọi E là trung điểm của HI, F là trung điểm của AB. Chứng minh $ME \perp EF$

Bài 7. (1,0 điểm) Cho x, y là các số thực dương và $x + y \leq 1$

a) Chứng minh rằng $\frac{x^3 + y^3}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2} \right)^3$

b) Tìm $Min P = \left(1 + x + \frac{1}{x} \right)^3 + \left(1 + y + \frac{1}{y} \right)^3$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Xét $x^2 + x\sqrt{3} + 3 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} > 0$, $DKXD: x \neq 0, x \neq 3$. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right) \cdot \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 3}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{x - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{Thay } x = \sqrt{3} + 2020(\text{tmdk}) \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{3} + 2020 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2020}$$

$$\begin{aligned} b) B &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - 2\sqrt{5} + 3}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} \\ &= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5} - 1} = \sqrt{-1} = 1 \end{aligned}$$

Câu 2.

Ta có : $x^2 - 2x - 2 = 0$ có $ac < 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt

x_1, x_2 . Áp dụng hệ thức Vi – et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases}$$

a) Ta có:

$$x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = x_1 x_2 [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = -2[2^2 - 2(-2)] = -16$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_1^2 + 2x_2} + \frac{x_2}{x_2^2 + 2x_1} &= \frac{x_1(x_2^2 + 2x_1) + x_2(x_1^2 + 2x_2)}{(x_2^2 + 2x_1)(x_1^2 + 2x_2)} \\
&= \frac{x_1x_2^2 + 2x_1^2 + x_2x_1^2 + 2x_2^2}{x_1^2x_2^2 + 2x_1^3 + 2x_2^3 + 4x_1x_2} = \frac{x_1x_2(x_1 + x_2) + 2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]}{(x_1x_2)^2 + 4x_1x_2 + 2[(x_1^3 + x_2^3)]} \\
&= \frac{x_1x_2(x_1 + x_2) + 2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]}{(x_1x_2)^2 + 4x_1x_2 + 2[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]} = \frac{-2 \cdot 2 + 2[2^2 - 2 \cdot (-2)]}{(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot [2^2 - 3 \cdot (-2)]} = \frac{23}{30}
\end{aligned}$$

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + xy + y = 11 \end{cases}$$

Ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + xy + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 13 \\ (x + y) + xy = 11 \end{cases} \text{ . Đặt } \begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$$

Hệ phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 2v = 13 \\ u + v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 2v = 13 \\ 2u + 2v = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 2u = 35 \\ u + v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 2u - 35 = 0 \\ u + v = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 7u - 5u - 35 = 0 \\ u + v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(u + 7) - 5(u + 7) = 0 \\ u + v = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u - 5)(u + 7) = 0 \\ u + v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = 5 \\ u = -7 \end{cases} \\ u + v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} u = -7 \\ v = 18 \end{cases} \end{cases}$$

$$*) \begin{cases} u = 5 \\ v = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$*) \begin{cases} u = -7 \\ v = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 - x \\ x^2 + 7x + 18 = 0(VN) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $(3; 2); (2; 3)$

b) Giải phương trình: $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x^2} = 2$. ĐK: $-2 \leq x \leq 2$

Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$ ($t > 0$)

$$\Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(2-x)(2+x)} \Leftrightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{t^2 - 4}{2}$$

Phương trình ban đầu trở thành : $t + \frac{t^2 - 4}{2} = 2 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4(ktm) \\ t = 2(tm) \end{cases}$

Với $t = 2 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{2^2 - 4}{2} \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(tm) \\ x = -2(tm) \end{cases}$

Câu 4.

a) $P = 2.6^{2n} - 2.6^n + 3.6^n - 3 = 2.6^n(6^n - 1) + 3.(6^n - 1)$
 $= (6^n - 1)(2.6^n + 3) = (6^n - 1)[2.(6^n - 1) + 5]$

Ta có : $6^n - 1 : 5 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2.(6^n - 1) + 5 : 5 \forall n \in \mathbb{N}$

Vậy $P : 25$ với mọi số tự nhiên n

b) $x^2 - xy + y^2 - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + 4y^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (2x - y)^2 + 3y^2 = 16(1)$$

Ta có: $3y^2 \leq 16 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{16}{3} \Rightarrow y^2 \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$

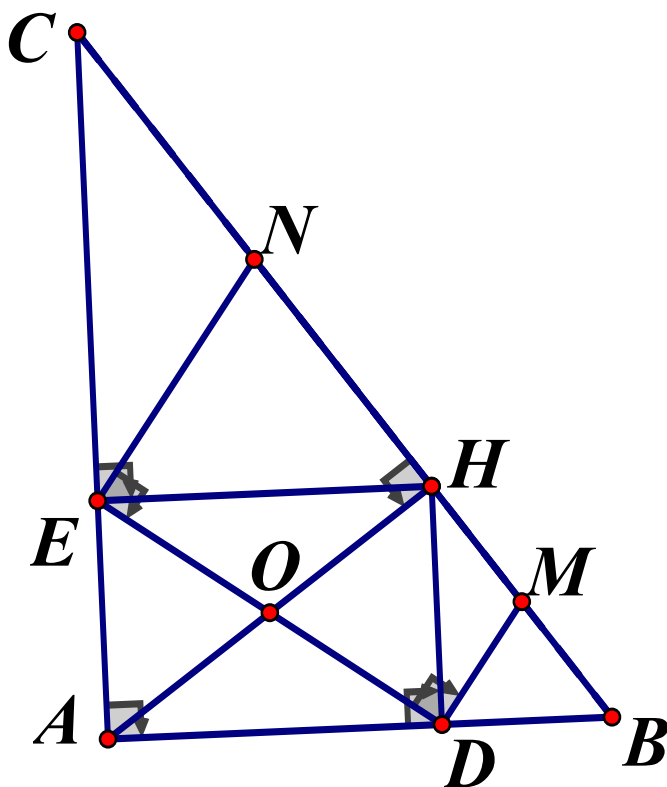
+) $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

+) $y^2 = 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow (2x - y)^2 = 13(ktm)$

+) $y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x \in \{0; 2\} \\ y = -2 \Rightarrow x \in \{0; -2\} \end{cases}$

Vậy $(x, y) \in \{(2; 0); (-2; 0); (0; 2); (2; 2); (0; -2); (-2; -2)\}$

Câu 5.



a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH , ta có:

$$AH^2 = HB \cdot HC = 36 \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)} \Rightarrow AH = 6 \text{ cm}$$

Ta có tứ giác $ADHE$ có $\angle DAE = \angle HDA = \angle AEH = 90^\circ$, do đó $ADHE$ là hình chữ nhật
 $\Rightarrow AH = DE = 6 \text{ cm}$

b) Gọi O là giao điểm của AH và DE

Vì tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật nên $OH = OE \Rightarrow \triangle OHE$ cân tại O

$$\Rightarrow \angle OEH = \angle OHE \quad (1)$$

Ta có: $\angle OEH = \angle NEC$ (cùng phụ với $\angle HNE$) (2)

$$\angle OHE = \angle NCE \text{ (cùng phụ với } \angle EHC) \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \angle NEC = \angle NCE \Rightarrow \triangle NEC \text{ cân tại } N \Rightarrow NE = NC \quad (4)$$

$$\text{Lại có } \angle EHN + \angle NCE = \angle HEN + \angle NEC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle NEH = \angle NHE \Rightarrow \triangle NEH \text{ cân tại } N \Rightarrow NE = NH \quad (5)$$

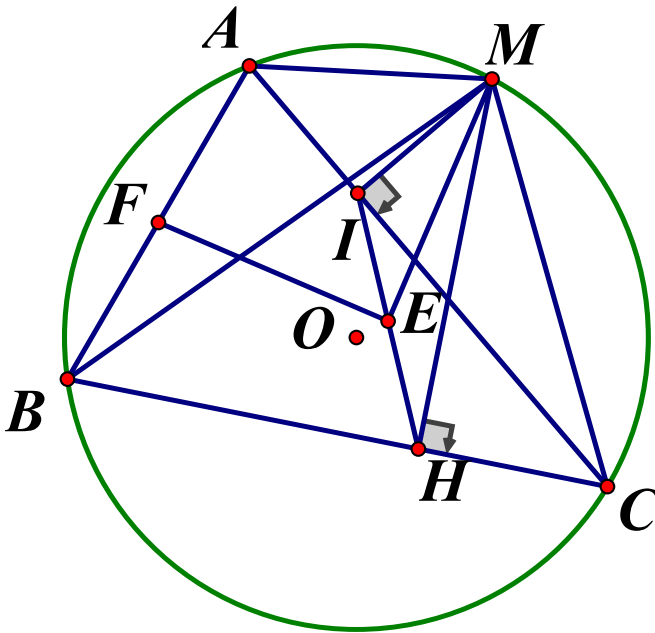
$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } NE = NH = NC = \frac{HC}{2} = 4,5 \text{ (cm)}$$

$$\text{Chứng minh tương tự } DM = \frac{BH}{2} = 2 \text{ (cm)}$$

Tứ giác $DMNE$ có $DM \parallel EN$ (cùng vuông góc với DE) $\Rightarrow DMNE$ là hình thang

$$S_{DMNE} = \frac{1}{2} DE \cdot (MD + NE) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (4,5 + 2) = 19,5 (cm^2)$$

Câu 6.



a) Xét tứ giác $MIHC$ có $\angle MIC = \angle MHC = 90^\circ \Rightarrow MIHC$ là tứ giác nội tiếp
 $\Rightarrow \angle IHM = \angle ICM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung IM)

b) Tứ giác $MIHC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle ICH = \angle IMH$ (cùng chắn cung IH)

Trong đường tròn tâm O có $\angle AMB = \angle ACB$ (cùng chắn cung AC)

$$\Rightarrow \angle AMB = \angle IMH$$

Xét $\triangle BMA$ và $\triangle HMI$ có: $\angle AMB = \angle IMH$ (cmt); $\angle ABM = \angle IHM (= \angle ICM)$

$$\Rightarrow \triangle BMA \sim \triangle HMI (g.g)$$

c) Ta có $\triangle BMA \sim \triangle HMI$ (cmt), mà ME, MF lần lượt là hai đường trung tuyến của hai tam giác $\triangle BMA, \triangle HMI$

$$\Rightarrow \angle AMI = \angle FME = \angle HMB; \frac{MI}{MA} = \frac{ME}{MF} = \frac{MH}{MB}$$

$$\Rightarrow \triangle MIA \sim \triangle MEF \sim \triangle MHB$$

$$\Rightarrow \angle MIA = \angle MEF \text{ hay } ME \perp EF$$

Câu 7.

$$a) \frac{x^3 + y^3}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^3 \Leftrightarrow 4(x^3 + y^3) \geq x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) \geq xy(x+y)$$

$$\text{Vì } x+y > 0 \Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 \geq xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$

b) Áp dụng câu a ta có:

$$P = \left(1+x+\frac{1}{x} \right)^3 + \left(1+y+\frac{1}{y} \right)^3 \geq \frac{1}{4} \left(1+x+\frac{1}{x} + 1+y+\frac{1}{y} \right)^3$$

$$\text{Xét } A = 1+x+\frac{1}{x} + 1+y+\frac{1}{y} = 2+x+y+\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$= 2 + \frac{x+y}{xy} + 4(x+y) - 3(x+y)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương ta có:

$$\frac{x+y}{xy} + 4(x+y) \geq 2\sqrt{\frac{x+y}{xy} \cdot 4(x+y)}. \text{ Ta có:}$$

$$\frac{x+y}{xy} \cdot 4(x+y) = 4 \cdot \frac{(x+y)^2}{xy} \geq 4 \cdot \frac{4xy}{xy} = 16 \Rightarrow \frac{x+y}{xy} + 4(x+y) \geq 2\sqrt{16} = 8$$

$$\Rightarrow x+y \leq 1 \Rightarrow -3(x+y) \geq -3 \Rightarrow A \geq 2+8-3=7$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{4} \cdot 7^3 = \frac{343}{4}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{343}{4} \Leftrightarrow x = y = 2$$