

(Đề thi có 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (5,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x-y)f(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3 \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 2. (3,0 điểm)

Cho p là số nguyên tố lẻ và T là tập hợp gồm tất cả các bộ ba số tự nhiên (a, b, c) thỏa mãn $1 \leq a < b < c \leq p-1$. Đặt $S = \sum_{(a,b,c) \in T} abc$. Chứng minh rằng S chia hết cho p .

Câu 3. (5,0 điểm)

Giả sử phương trình $x^3 - 3ax^2 + (a+2)x - 1 = 0$ (a là tham số thực, $a > 0$) có ba nghiệm thực x_1, x_2, x_3 . Với mỗi số nguyên dương n , đặt $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$. Tìm tất cả các giá trị của a để $1 + \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{S_{k+1}} > n$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác nhọn không cân ABC , AD, BE, CF là các đường cao. H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, D trên EF . Giả sử đường tròn tâm H bán kính HA cắt AB, AC tương ứng tại M, N .

- a) Chứng minh rằng các điểm M, N, H, K cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là ω .
- b) Giả sử KM, KN lần lượt cắt CF, BE tại P, Q . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ tiếp xúc với đường tròn ω .

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho A, B, C là các góc của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sin A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^3 C \leq \frac{27\sqrt{5}}{125}.$$

Hết

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....