

Bài 1: (3,5 điểm) Cho các biểu thức

$$A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{9}};$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{8}};$$

$$C = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{8}.$$

a) Tính giá trị của biểu thức A .

b) So sánh giá trị các biểu thức A, B và C .

Bài 2: (3,5 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x^2 + 4y^2) = 5y \\ y(4y^2 - x^2) = 3x \end{cases}$$

Bài 3: (4,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$, I là trung điểm AB . Dựng đường tròn tâm I đường kính AB . Tiếp tuyến DE với (I) cắt cạnh BC tại F (E là tiếp điểm).

a) Biết $EF = 6,25(cm)$, tính cạnh hình vuông.

b) Trên nửa đường tròn đường kính AB (phần không cùng phía với hình vuông $ABCD$) lấy các điểm M và N sao cho $BM = MN = 15(cm)$ (M nằm giữa B và N). Tính chu vi tứ giác $BMNA$.

Bài 4: (3,0 điểm)

a) Đặt $x = \frac{a-b}{a+b}$; $y = \frac{b-c}{b+c}$; $z = \frac{c-a}{c+a}$ với a, b, c là các số tự nhiên dương.

Chứng minh rằng: $(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z)$.

b) Biết $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 12$, tính giá trị biểu thức $S = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$.

Bài 5: (3,0 điểm) Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} - \frac{4}{x^2}$.

Tìm GTNN của biểu thức $P = 4x + y + 2024$.

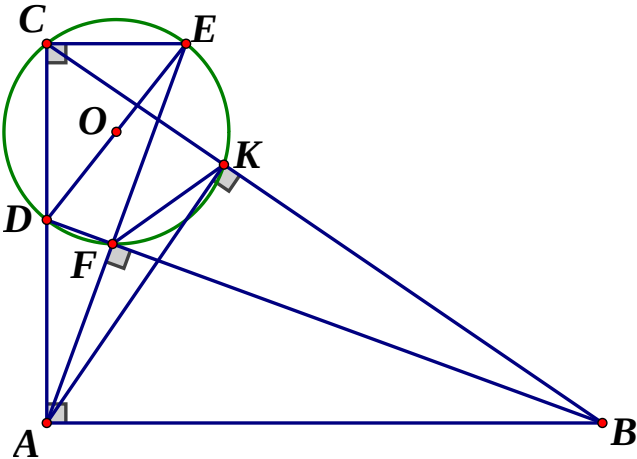
Bài 6: (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , điểm D di động trên cạnh AC . Đường thẳng qua A và vuông góc với BD cắt đường thẳng qua C và vuông góc với AC tại E . Chứng minh rằng đường tròn đường kính DE luôn đi qua 1 điểm cố định thứ hai (khác điểm C).

----- HẾT -----

Bài	Nội dung
Bài 1	Cho các biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{9}};$ $B = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{8}};$ $C = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{8}.$ a) Tính giá trị của biểu thức A. b) So sánh giá trị các biểu thức A, B và C.
	a) Có $A = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{9} - \sqrt{8}) = -1 + \sqrt{9} = 2$. b) Có $\frac{B}{2} = \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{8}}$ $\Rightarrow \frac{B}{2} > \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{8}}$ $\Rightarrow \frac{B}{2} > 2 \Rightarrow B > 4 > 2 > A$ $C - B = \left(\sqrt{1} - \frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \dots + \left(\sqrt{8} - \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$ Xét $= \frac{1-1}{\sqrt{1}} + \frac{2-1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{8-1}{\sqrt{8}} > 0$ $\Rightarrow C - B > 0 \Rightarrow C > B$ Vậy $A < B < C$
Bài 2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x^2 + 4y^2) = 5y \\ y(4y^2 - x^2) = 3x \end{cases}$
	TH1: $x = y = 0$ thỏa mãn hệ nên $(x; y) = (0; 0)$ là 1 nghiệm của hệ. TH2: $x \neq 0; y \neq 0$. $\begin{cases} x(x^2 + 4y^2) = 5y \\ y(4y^2 - x^2) = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x^2 + 4y^2) = 5xy \\ y^2(4y^2 - x^2) = 3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 + 12x^2y^2 = 15xy & (1) \\ 20y^4 - 5x^2y^2 = 15xy & (2) \end{cases}$ Trừ từng vế hai pt của hệ ta được: $3x^4 + 17x^2y^2 - 20y^4 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 20y^2)(x^2 - y^2) = 0$ $\Leftrightarrow x^2 = y^2 \text{ (Do } x \neq 0; y \neq 0 \text{ nên } 3x^2 + 20y^2 \neq 0)$ $\Leftrightarrow x = \pm y$ +) $x = y$ thay vào (2) ta có: $20y^4 - 5y^4 = 15y^2 \Leftrightarrow 15y^4 - 15y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$ Khi đó, hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1); (x; y) = (-1; -1)$. +) $x = -y$ Thay vào (2) ta có: $20y^4 - 5y^4 = -15y^2 \Leftrightarrow 15y^4 + 15y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (loại) Vậy HPT có nghiệm: $(0; 0); (1; 1); (-1; -1)$
Bài 3	Cho hình vuông $ABCD$, I là trung điểm AB. Dựng đường tròn tâm I đường kính AB. Tiếp tuyến DE với (I) cắt cạnh BC tại F (E là tiếp điểm).

	a) Biết $EF = 6,25(cm)$, tính cạnh hình vuông. b) Trên nửa đường tròn đường kính AB (phần không cùng phía với hình vuông $ABCD$) lấy các điểm M và N sao cho $BM = MN = 15(cm)$ (M nằm giữa B và N). Tính chu vi tứ giác $BMNA$.
a)	Gọi cạnh hình vuông là $x(cm)$. ĐK $x > 0$ Đường tròn đường kính AB có DA, DE là hai tiếp tuyến cắt nhau tại $D \Rightarrow AD = DE = x$ Đường tròn đường kính AB có FB, FE là hai tiếp tuyến cắt nhau ở F $\Rightarrow EF = BF = 6,25$. Khi đó $DF = x + 6,25$; $CF = x - 6,25$. Áp dụng pytago cho tam giác vuông CDF : $DF^2 = DC^2 + CF^2$ $(x + 6,25)^2 = x^2 + (x - 6,25)^2$ $\Rightarrow x = 25(tm); \quad x = 0(k(tm))$ Vậy cạnh hình vuông là $25(cm)$
b)	Gọi K là giao điểm của AM và BN +) Áp dụng pytago cho tam giác vuông AMB vuông tại $M \Rightarrow AM = 20(cm)$ +) Chứng minh $\triangle NAM \sim \triangle KNM (g.g) \Rightarrow MN^2 = MK.MA$ $\Rightarrow MK = 11,25(cm)$; $AK = 8,75(cm)$ +) Áp dụng Pytago tính $BK = \sqrt{15^2 + 11,25^2} = 18,75(cm)$ +) Chứng minh $\triangle ANK \sim \triangle BMK (g.g) \Rightarrow \frac{AN}{BM} = \frac{AK}{BK} \Rightarrow AN = \frac{BM.AK}{BK} = \frac{15.8,75}{18,75} = 7(cm)$ +) Khi đó chu vi tứ giác $BMNA$ là : $15 + 15 + 7 + 25 = 62(cm)$

Bài 4:	a) Đặt $x = \frac{a-b}{a+b}; y = \frac{b-c}{b+c}; z = \frac{c-a}{c+a}$ với a, b, c là các số tự nhiên dương. Chứng minh rằng : $(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z)$. b) Biết $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 12$, tính giá trị biểu thức $S = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$.
a)	Ta có $(1-x)(1-y)(1-z) = \frac{2b}{a+b} \cdot \frac{2c}{b+c} \cdot \frac{2a}{c+a} = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. $(1+x)(1+y)(1+z) = \frac{2a}{a+b} \cdot \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{c+a} = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. Suy ra đpcm.
b)	Có $2S = \frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{c+a}$ $= \left(\frac{a-b}{a+b} + 1 \right) + \left(\frac{b-c}{b+c} + 1 \right) + \left(\frac{c-a}{c+a} + 1 \right) = (x+1) + (y+1) + (z+1) = x+y+z+3 \quad (1)$. Có $(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z)$ $\Leftrightarrow x+y+z+xyz = 0 \quad (2)$ Mặt khác $\frac{(a+b)}{(a-b)} \cdot \frac{(b+c)}{(b-c)} \cdot \frac{(c+a)}{(c-a)} = 12 \Rightarrow \frac{1}{xyz} = 12 \Rightarrow xyz = \frac{1}{12} \quad (3)$ Từ (1); (2); (3) ta được: $2S = x+y+z+3 = -xyz+3 = \frac{-1}{12} + 3 = \frac{35}{12} \Rightarrow S = \frac{35}{24}$
Bài 5	Cho x; y là hai số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} - \frac{4}{x^2}$. Tìm GTNN của biểu thức $P = 4x + y + 2024$
	Ta có $\frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} - \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} + \frac{4}{x^2} = \frac{5}{4}$ Áp dụng BĐT Cauchy: $4x + \frac{16}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{16}{x}} = 16$; $y + \frac{4}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{4}{y}} = 4$. Xét $P = 4x + y + 2024 = \left(4x + \frac{16}{x} \right) + \left(y + \frac{4}{y} \right) + 2024 - \left(\frac{16}{x} + \frac{4}{y} \right)$ $\geq 20 + 2024 - 4 \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} \right)$ Mặt khác $\frac{4}{x^2} + 1 \geq \frac{4}{x}$; $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{y}$ $\Rightarrow \frac{4}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow -4 \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq -10$ $\Rightarrow P \geq 20 + 2024 - 10 = 2034$.

	Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 2$.
Bài 6	Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D di động trên cạnh AC. Đường thẳng qua A và vuông góc với BD cắt đường thẳng qua C và vuông góc với AC tại E. Chứng minh rằng đường tròn đường kính DE luôn đi qua 1 điểm cố định thứ hai (khác điểm C)
	 Kẻ đường cao AK của tam giác ABC ($K \in BC$). Gọi F là giao điểm của BD và AE, O là tâm đường tròn đường kính DE. Theo gt: $\begin{cases} ECD = 90^\circ \\ EFD = 90^\circ \end{cases}$ Xét tứ giác $ECDF$ có $ECD + EFD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mà đây là hai góc đối nhau, nên tứ giác $ECDF$ nội tiếp đường tròn tâm O đường kính DE. (1) Áp dụng hệ thức lượng ta có: $AB^2 = BF \cdot BD; \quad AB^2 = BK \cdot BC$ $\Rightarrow BF \cdot BD = BK \cdot BC \Rightarrow \frac{BF}{BK} = \frac{BC}{BD}$ Xét tam giác BFK và tam giác BCD có: $\begin{cases} \frac{BF}{BK} = \frac{BC}{BD} \\ \angle B \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle BFK \sim \triangle BCD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle BFK = \angle BCD \text{ (hai góc tương ứng)}$ Mà $\angle BFK + \angle KFD = 180^\circ$, nên $\angle KCD + \angle KFD = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $CDFK$ nội tiếp (2) Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm C, D, F, K, E cùng thuộc 1 đường tròn đường kính DE. Mà K cố định khi D di chuyển trên AC. Vậy đường tròn đường kính DE luôn đi qua điểm cố định K khi D di chuyển trên AC

LỜI GIẢI ĐỀ HSG TOÁN 9 TỈNH PHÚ YÊN

NĂM HỌC 2023 - 2024