SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT VÒNG TỈNH
NĂM HỌC 2020 - 2021

Ngày Thi: 07 tháng 10 năm 2020 (Buổi thi thứ nhất)
Môn thi: TOÁN – Lớp: 12 THPT
Thời gian: 180 phút (*không kể thời gian giao đề*).

ĐỀ CHÍNH THỨC

(*Đề thi gồm có 01 trang, thí sinh không phải chép đề vào giấy thi*)

Bài 1: (5 điểm)

Cho x, y, z là ba số thực dương và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của từng biểu thức sau:

a/ $A=\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}$

b/ $B=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{1}{z^2+1}$.

Bài 2: (5 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(yf(x+y)+f(x)\right)=4x+2y.f(x+y),\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Bài 3: (5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi H, O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B của tam giác ABC. Các đường thẳng OD và BE cắt nhau tại K. Các đường thẳng OE và AD cắt nhau tại L. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Chứng minh rằng ba điểm K, L, M thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm C, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 4: (5 điểm)

Bạn Dung và bạn Lan tham gia giải cờ vua nữ cấp trường (cùng một số bạn khác). Biết rằng, trong số những bạn tham gia, 2 bạn bất kỳ sẽ đấu với nhau đúng 1 lần, người thắng sẽ được 1 điểm, hòa được 0,5 điểm và thua được 0 điểm. Sau khi giải đấu kết thúc, người ta thấy rằng: tổng điểm của Dung và Lan là 4 điểm, trong khi tất cả các bạn còn lại đều có số điểm bằng nhau. Hơn nữa, điểm của mỗi bạn Dung, Lan luôn ít hơn điểm của mỗi bạn khác.

a/ Hãy tính xem có bao nhiêu bạn tham gia giải cờ vua nữ cấp trường này.

b/ Nêu ra mô hình thi đấu cụ thể thỏa mãn đề bài (với đáp số tìm được trong câu a/).

---- Hết ----

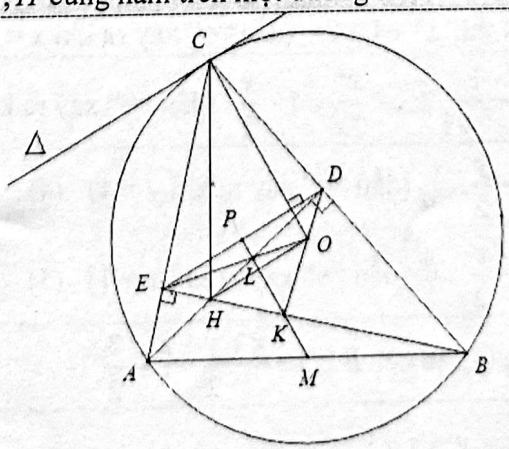
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT VÒNG TỈNH
NĂM HỌC 2020 - 2021

HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN TOÁN – LỚP: 12 THPT
(BUỔI THI THỨ NHẤT)

Bài 1	Nội dung diễn đạt	Thang điểm	Ghi chú
Đề	Cho x, y, z là ba số thực dương và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của từng biểu thức sau: a/ $A=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$ b/ $B=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}$.		
	a/ HS chứng minh: Cho $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3$, và b_1, b_2, b_3 là ba số dương. Khi đó: $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\frac{a_3^2}{b_3} \ge \frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}$.	0,25	
	Áp dụng BĐT Bunhiacopski với 2 dãy: $\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}; \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}; \frac{a_3}{\sqrt{b_3}}$ và $\sqrt{b_1}; \sqrt{b_2}; \sqrt{b_3}$ ta có: $\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\frac{a_3^2}{b_3}\right)(b_1+b_2+b_3) \ge (a_1+a_2+a_3)^2$	0,25	
	Do $b_1+b_2+b_3>0$ nên có: $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\frac{a_3^2}{b_3} \ge \frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}$.	0,25	
	Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}}{\sqrt{b_1}}=\frac{\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}}{\sqrt{b_2}}=\frac{\frac{a_3}{\sqrt{b_3}}}{\sqrt{b_3}} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.	0,25	
	Áp dụng trực tiếp bổ đề trên ta có: $A=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x} \ge \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}$.	0,5	
	Vậy $\min A=\frac{3}{2}$ khi $x=y=z=1$.	0,5	
	b/ Ta có: $\frac{1}{x^2+1}=1-\frac{x^2}{x^2+1}$ (1)	0,5	
	Theo BĐT TBC-TBN thì: $x^2+1 \ge 2x$ (dấu "=" xảy ra khi x = 1) (2)	0,5	
	Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{x^2+1} \ge 1-\frac{x^2}{2x}=1-\frac{x}{2}$ (dấu "=" xảy ra khi x = 1) (3)	0,5	
	Tương tự: $\frac{1}{y^2+1} \ge 1-\frac{y}{2}$ (dấu "=" xảy ra khi y = 1) (4) $\frac{1}{z^2+1} \ge 1-\frac{z}{2}$ (dấu "=" xảy ra khi z = 1) (5)	0,25 0,25	
	Cộng từng vế (3), (4), (5), ta có: $B \ge 3-\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}$	0,5	
	Vậy $\min B=\frac{3}{2}$ khi $x=y=z=1$.	0,5	

Bài 2	Nội dung diễn đạt	Thang điểm	Ghi chú
Đề	Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(yf(x+y)+f(x)\right)=4x+2y.f(x+y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$		
	Xét phương trình: $f\left(yf(x+y)+f(x)\right)=4x+2y.f(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1) Thay $y=0$, ta có $f(f(x))=4x,\forall x\in\mathbb{R}$ (2)	0,5	
	Từ (2), cho $x=0$ ta được $f(f(0))=0$ (3) Cho $x=1$ ta được $f(f(1))=4$ (4)	0,25 0,25	
	Thay x bởi $f(0)$ vào (2), và dùng (3) ta có: $f(0)=0$ (5)	0,5	
	Cho $x=0;\ y=x$ vào (1) ta được: $f(xf(x))=2xf(x),\forall x$ (6)	0,5	
	Từ (6) cho $x=1$ ta được: $f(f(1))=2f(1)$ (7)	0,5	
	Từ (4) và (7) suy ra: $f(1)=2$	0,25	
	Thay $x=1$ vào (2) ta được $f(2)=4$ Thay $x=2$ vào (2) ta được $f(4)=8$ (8)	0,25 0,25	
	Thay $y=1-x$ vào (1) ta được $f\left((1-x)f(1)+f(x)\right)=4x+2(1-x).f(1),\quad \forall x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f\left((1-x).2+f(x)\right)=4,\ \forall x\in\mathbb{R}$	0,5	
	Lấy f hai vế, suy ra: $4[(1-x)2+f(x)]=f(4)$ $\Leftrightarrow 8-8x+4f(x)=f(4)$ $\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{f(4)+8x-8}{4}=2x+\dfrac{f(4)-8}{4}$ (9)	0,5	
	Lấy (8) thay vào (9) thì được: $f(x)=2x,\ \forall x$	0,25	
	Thử lại thấy thỏa đề bài.	**0,25**	
	Kết luận: Hàm số cần tìm là $f(x)=2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.	0,25.	

Bài 3	Nội dung diễn đạt	Thang điểm	Ghi chú
Đề	Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi H,O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; D,E lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A,B của tam giác ABC. Các đường thẳng OD và BE cắt nhau tại K. Các đường thẳng OE và AD cắt nhau tại L. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Chứng minh rằng ba điểm K,L,M thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm C,D,O,H cùng nằm trên một đường tròn.		
			

	Sử dụng định lý Menelaus cho tam giác HAB và 3 điểm K, L, M ta thấy K, L, M thẳng hàng khi và chỉ khi: $\frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}.\frac{\overline{LH}}{\overline{LA}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=1 \Leftrightarrow \frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}=-\frac{\overline{LA}}{\overline{LH}}$ (1)	0,5	
	Mặt khác, dễ thấy: $\frac{KB}{KH}=\frac{S_{BOD}}{S_{HOD}}$ (2);	0,5	
	$\frac{LA}{LH}=\frac{S_{AOE}}{S_{HOE}}$ (3);	0,5	
	Gọi R là bán kính đường tròn (O) ta có: $S_{AOE}=\frac{1}{2}AE.d(O;AE)=\frac{1}{2}AB.\cos A.R.\cos B=\frac{1}{2}R.AB.\cos A.\cos B$	0,5	
	Tương tự: $S_{BOD}=\frac{1}{2}R.AB.\cos A.\cos B$	0,5	
	Suy ra: $S_{AOE}=S_{BOD}$.	0,25	
	Từ (2), (3) ta thấy (1) xảy ra khi và chỉ khi $S_{HOD}=S_{HOE}$; khi chỉ khi $OH//DE$ hoặc OH đi qua trung điểm của DE.	0,5	
	Qua C, kẻ tiếp tuyến Δ với đường tròn (O) thì dễ thấy rằng $\Delta//DE$.	0,5	
	Mà $CO \perp \Delta$ nên $CO \perp DE$.	0,25	
	Gọi P là trung điểm DE. Nếu OH đi qua trung điểm của DE thì lúc này P là trung điểm của đoạn HO, do đó tứ giác $EHDO$ là hình bình hành. Suy ra $OD//HE$ và $OE//HD$. Điều này trái giả thiết OD cắt BE và OE cắt AD.	0,5	
	Vậy ba điểm K, L, M thẳng hàng khi và chỉ khi $OH//DE \Leftrightarrow CO \perp OH$, nghĩa là khi chỉ khi bốn điểm C, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn (đường kính CH).	0,5	

Bài 4	**Nội dung diễn đạt**	**Thang điểm**	**Ghi chú**
Đề	Bạn Dung và bạn Lan tham gia giải cờ vua nữ cấp trường (cùng một số bạn khác). Biết rằng, trong số những bạn tham gia, 2 bạn bất kỳ sẽ đấu với nhau đúng 1 lần, người thắng sẽ được 1 điểm, hòa được 0,5 điểm và thua được 0 điểm. Sau khi giải đấu kết thúc, người ta thấy rằng: tổng điểm của Dung và Lan là 4 điểm, trong khi tất cả các bạn còn lại đều có số điểm bằng nhau. Hơn nữa, điểm của mỗi bạn Dung, Lan luôn ít hơn điểm của mỗi bạn khác. a/ Hãy tính xem có bao nhiêu bạn tham gia giải cờ vua nữ cấp trường này. b/ Nêu ra mô hình thi đấu cụ thể thỏa mãn đề bài (với đáp số tìm được trong câu a/).		
a/	Giả sử tồn tại kết quả như đề. Gọi n $(n \in \mathbb{Z}^+)$ là số người tham gia giải đấu (không tính Dung, Lan) Ta thấy giải đấu có $n+2$ bạn.	0,5	
	Số trận đấu của giải : C_{n+2}^2. Ta sẽ đếm tổng điểm $n+2$ bạn chơi theo 2 cách để suy ra kết quả.	0,5	

	Cách 1: Gọi k là số điểm của mỗi bạn trong n bạn (không có Lan, Dung trong đó) => Vậy tổng điểm $n+2$ bạn chơi là : $kn+4$.	0.5	
	Cách 2: Do 1 trận thì có 1 điểm để chia cho 2 bạn chơi (quy luật chơi) Mà có C_{n+2}^2 trận đấu nên có tổng điểm của $n+2$ bạn chơi là C_{n+2}^2 điểm.	0,5	
	Vậy ta được: $C_{n+2}^2 = kn+4$	0,5	
	$\Leftrightarrow (n+2)(n+1) = 2kn+8$ $\Leftrightarrow n(n+3-2k) = 6$	0,25	
	Vì $n \in \mathbb{Z}^+$ nên $n = 1;2;3;6$.	0,25	
	Tổng điểm của Dung, Lan là 4 nên tổng trận 2 người này ít nhất là 4, nên n không thể là 1	0,25	
	$n=2 \Rightarrow k=1$ => điểm Dung, Lan sẽ nhỏ hơn bằng 0,5 => trái tổng là 4.	0,25	
	$n=3 \Rightarrow k=2$ => điểm Dung, Lan sẽ nhỏ hơn bằng 1,5 => trái tổng là 4.	0,25	
	Vậy $n=6$, nên số bạn tham gia giải cờ vua nữ cấp trường này là **8 bạn**.	0,25	
b/	Mô hình thi đấu cụ thể thỏa mãn đề bài : Gọi $a_i (i=1,2,...,6)$ là những người chơi khác Lan, Dung	1	

Người chơi	Người chơi	Kết quả thi đấu
a_i	$a_j\ (j \neq i)$	0.5 - 0.5
$a_i\ (i=1,2,3)$	Dung	0.5 - 0.5
$a_i\ (i=4,5,6)$	Dung	1 - 0
$a_i\ (i=1,2,3)$	Lan	1 - 0
$a_i\ (i=4,5,6)$	Lan	0.5 - 0.5
Dung	Lan	0.5 - 0.5

--- Hết ---