

GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN
ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 02 trang gồm 7 câu)

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC
2024-2025

Môn thi: **TOÁN (CHUYÊN TOÁN +**
CHUYÊN TIN)

Ngày thi: **07/06/2024**

Thời gian làm bài: **150 phút (không kể thời**
gian phát đề)

Câu 1.(1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-6\sqrt{x}+4}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

a. Rút gọn biểu thức P .

b. Tính giá trị của biểu thức P biết $x = 9 + 4\sqrt{5}$.

Câu 2. (2.0 điểm)

a. Chương trình Đêm nhạc Trao của Câu lạc bộ Sự kiện Trường THPT chuyên Long An là một hoạt động thiện nguyện tạo được nhiều dấu ấn trong năm học 2023-2024. Đêm nhạc được tổ chức nhằm gây quỹ hỗ trợ cho lớp học tình thương tại thị trấn Tân Hưng, huyện Tân Hưng, tỉnh Long An. Ban tổ chức thực hiện gây quỹ thông qua 2 hình thức: bán vé và nhận quyên góp từ mạnh thường quân. Biết rằng số tiền thu được từ bán vé nhiều hơn số tiền quyên góp từ mạnh thường quân là 12 triệu đồng. Nếu thêm 6 triệu đồng vào số tiền quyên góp từ mạnh thường quân thì tổng số tiền quyên góp lúc này sẽ bằng 75% số tiền bán vé. Hỏi tổng số tiền ban tổ chức thu được từ hoạt động gây quỹ ở Đêm nhạc Trao là bao nhiêu?

b. Cho phương trình $2x^2 - 5x - 1 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2

Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $H = \frac{x_1 + x_2 + 6}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}$

Câu 3. (1,0 điểm)

Giải phương trình $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^2 + 3x^2 + 3x + 2}$.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H.

a. Chứng minh rằng tứ giác BFEC là một tứ giác nội tiếp, xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFEC

b. Gọi Q là giao điểm của đường cao AD với (O) (Q khác A). Chứng minh rằng ΔBHQ là tam giác cân.

c. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AH; K là giao điểm của AH và EF. Chứng minh rằng $IE^2 = IKID$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Tìm nghiệm nguyên dương x, y của phương trình $5x^4 + y^2 - 4x^2y - 85 = 0$.

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số thực không âm.

- a. Chứng minh rằng $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.
- b. Giả sử $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc} \leq 1$.

Câu 7. (1,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại M và N . Kẻ một tiếp tuyến chung ngoài lần lượt tiếp xúc với đường tròn (O) và đường tròn (O') tại A và B . Chứng minh rằng $\frac{MA}{MB} + \frac{NB}{NA} - 2 \geq 0$.

-----**HẾT**-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GD&ĐT LONG AN ĐỀ CHÍNH THỨC SỐ (1) (Đề thi gồm có 01 trang)	KỲ THI TUYỂN SINH 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2024-2025 Môn: Toán (Chuyên) Ngày thi: 07/06/2024 Thời gian: 150 phút (không kể phát đề)
---	--

Bài 1 (1,5 điểm). Cho biểu thức $P = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-6\sqrt{x}+4}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
- b) Tính giá trị của biểu thức P biết $x = 9 + 4\sqrt{5}$.

Lời giải.

a) Với $x \geq 0, x \neq 4$, ta có

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-6\sqrt{x}+4}{x-4} \\
 &= \frac{(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}+2) + (1-2\sqrt{x})(\sqrt{x}-2) + x-6\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x}+2x+x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2-2x+4\sqrt{x}+x-6\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x(\sqrt{x}+2)+(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}+2)(x+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}
 \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}$.

b) Ta có $x = 9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$ (thỏa mãn điều kiện).

Suy ra $\sqrt{x} = \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = |2 + \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5}$.

Do đó $P = \frac{9 + 4\sqrt{5} + 1}{2 + \sqrt{5} - 2} = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} + 4$.

Vậy với $x = 9 + 4\sqrt{5}$ thì $P = 2\sqrt{5} + 4$.

Bài 2 (2,0 điểm).

a) Chương trình Đêm nhạc Trao của Câu lạc bộ sự kiện Trường THPT chuyên Long An là một hoạt động thiện nguyện tạo được nhiều dấu ấn trong năm 2023-2024. Đêm nhạc được tổ chức nhằm gây quỹ hỗ trợ cho lớp học tình thương tại thị trấn Tân Hưng, huyện Tân Hưng, tỉnh Long An. Ban tổ chức thực hiện gây quỹ thông qua hai hình thức: bán vé và nhận quyên góp từ mạnh thường quân. Biết rằng số tiền thu được từ bán vé nhiều hơn số tiền quyên góp từ mạnh thường quân là 12 triệu đồng. Nếu thêm 6 triệu đồng vào số tiền quyên góp từ mạnh thường quân thì tổng số tiền quyên góp lúc này sẽ bằng 75% số tiền bán vé. Hỏi tổng số tiền ban tổ chức thu được từ hoạt động gây quỹ ở Đêm nhạc Trao là bao nhiêu?

b) Cho phương trình $2x^2 - 5x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $H = \frac{x_1 + x_2 + 6}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}$.

Lời giải.

a) Gọi x (triệu đồng) là số tiền ban tổ chức nhận quyên góp từ mạnh thường quân ($x > 0$).

Suy ra số tiền bán vé là $x + 12$ (triệu đồng).

Theo đề bài, ta có phương trình

$$x + 6 = \frac{3}{4}(x + 12) \Leftrightarrow 4x + 24 = 3x + 36 \Leftrightarrow x = 12 \text{ (nhân)}$$

Suy ra số tiền quyên góp từ mạnh thường quân là 12 triệu đồng; số tiền bán vé là $12 + 12 = 24$ (triệu đồng).

Vậy tổng số tiền ban tổ chức thu được từ hoạt động gây quỹ là $12 + 24 = 36$ (triệu đồng).

b) Vì $ac = 2 \cdot (-1) = -2 < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo hệ thức Vi-ét, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Xét biểu thức đề bài:

$$H = \frac{x_1 + x_2 + 6}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_1 + x_2 + 6}{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1} \\
&= \frac{x_1 + x_2 + 6}{(x_1 x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 1} \\
&= \frac{\frac{5}{2} + 6}{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-1}{2} + 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Vậy $H = 1$.

Bài 3 (1,0 điểm). Giải phương trình: $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$.

Lời giải.

Ta có: $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1$
 $= (x+1)^3 + 1$
 $= (x+2) \left[(x+1)^2 - (x+1) + 1 \right]$
 $= (x+2)(x^2 + x + 1)$

Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ nên phương trình xác định khi và chỉ khi

$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ Do đó phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
2(x^2 + 2x + 3) &= 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2} \\
\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 6 &= 5\sqrt{(x+2)(x^2 + x + 1)} \\
\Leftrightarrow 2(x^2 + x + 1) + 2(x+2) &= 5\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}.
\end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+2} \\ b = \sqrt{x^2 + x + 1} \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} a \geq 0 \\ b \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right) \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x+2 \\ b^2 = x^2 + x + 1 \end{cases}$.

Khi đó phương trình (") trở thành

$$\begin{aligned}
2b^2 + 2a^2 &= 5ab \Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \\
\Leftrightarrow 2a^2 - ab - 4ab + 2b^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow a(2a - b) - 2b(2a - b) &= 0 \\
\Leftrightarrow (a - 2b)(2a - b) &= 0 \\
\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \\ 2a - b = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2a = b. \end{cases}
\end{aligned}$$

Với $a = 2b$, suy ra

$$\sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x+2=4x^2+4x+4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+3x+2=0 \text{ vô nghiệm}$$

- Với $2a=b$, suy ra

$$2\sqrt{x+2}=\sqrt{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+2)=x^2+x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-7=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3+\sqrt{37}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{37}}{2} \end{cases} \text{ (Thoả mãn)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{3+\sqrt{37}}{2};\frac{3-\sqrt{37}}{2}\right\}$.

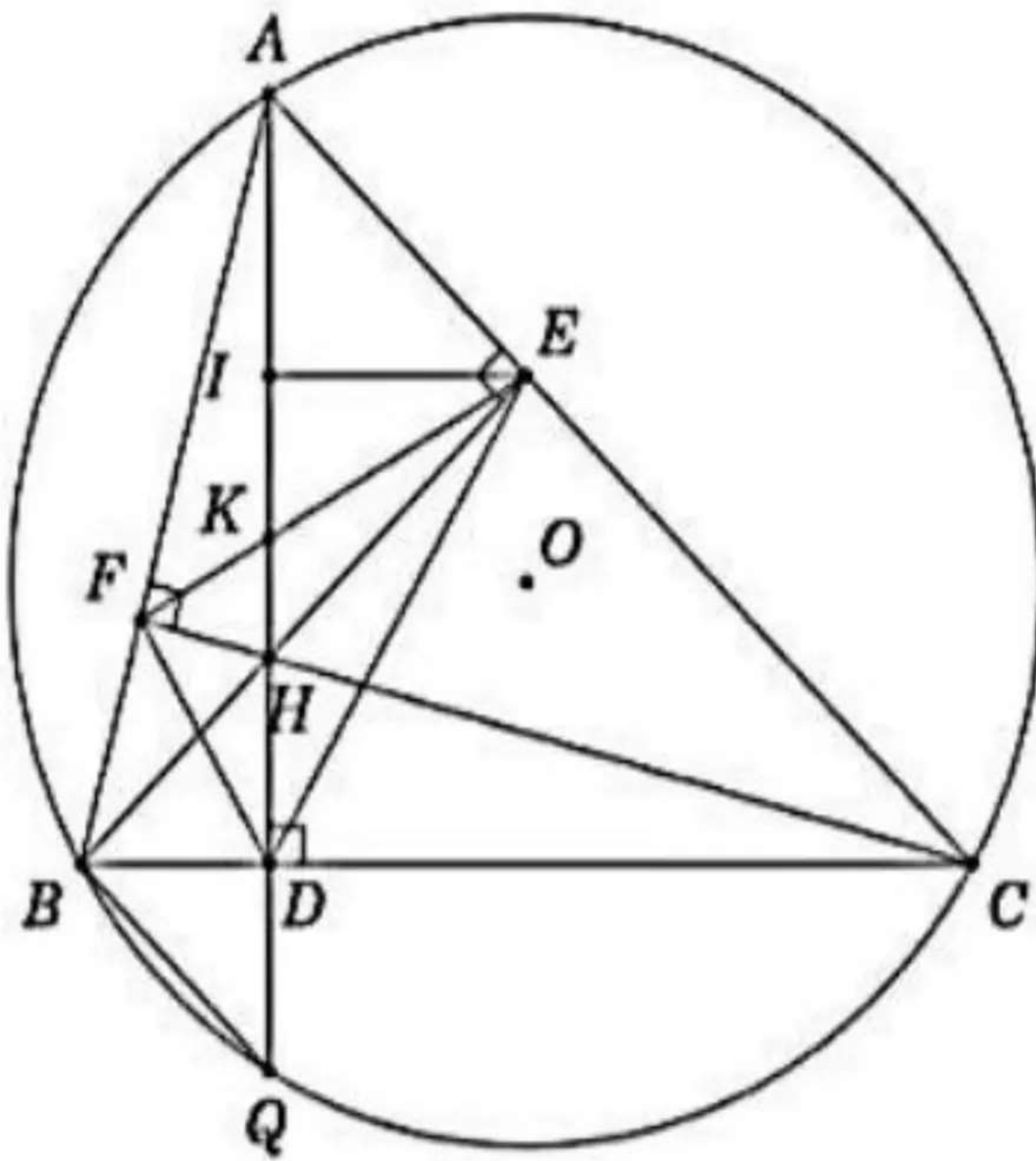
Bài 4 (2,5 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BFEC$ là một tứ giác nội tiếp. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$.

b) Gọi Q là giao điểm của đường cao AD với (O) (Q khác A). Chứng minh rằng tam giác BHQ là tam giác cân.

c) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AH ; K là giao điểm của AH và EF . Chứng minh rằng $IE^2=IK \cdot ID$.

Lời giải.



a) Xét tứ giác $BFEC$ có

- $BFC = 90^\circ$ (CF là đường cao của $\triangle ABC$);
- $BEC = 90^\circ$ (BE là đường cao của $\triangle ABC$); $\Rightarrow BFC + BEC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp được đường tròn. Lại có $BFC = 90^\circ$ và BFC là góc nội tiếp nên BC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$.

Vậy tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$ là trung điểm của BC .

b) Ta có $CBE = CAD$ (cùng phụ với BCA) hay $DBH = CAQ$.

Mà $CAQ = CBQ$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung CQ) nên

$$CBE = CBQ (= CAQ) \text{ hay } DBQ = DBQ.$$

Xét $\triangle BHQ$ có

- $BD \perp HQ \Rightarrow BD$ là đường cao.
- $DBQ = DBQ$ (chứng minh trên) nên BD là đường phân giác.

Vậy tam giác BHQ cân tại B .

c) Tứ giác $AEHF$ có $AEH + AFH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH (do $AEH = 90^\circ$) hay $AEHF$ nội tiếp đường tròn (I).

Suy ra $FEH = FAH$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung FH) hay $FEB = BAD$.

Và $IA = IE$ nên tam giác IAE cân tại $I \Rightarrow IEA = IAE$.

Lại có $IEK = AEB - (IEA + FEB)$

$$= 90^\circ - (\angle IAE + \angle BAD)$$

$$= 90^\circ - \angle BAC$$

$$= \angle ABE \text{ (}\triangle ABE \text{ vuông tại E)}$$

Tứ giác $ABDE$ có $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$ (giả thiết) nên tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn.

Suy ra $\angle ABE = \angle ADE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AE) hay $\angle ABE = \angle IDE$.

Từ (1) và (2) suy ra $\angle IEK = \angle IDE (= \angle ABE)$.

Xét $\triangle IEK$ và $\triangle IDE$ có

- $\angle EID$: góc chung.
- $\angle IEK = \angle IDE$ (chứng minh trên).
 $\Rightarrow \triangle IEK \sim \triangle IDE$ (góc - góc).
 $\Rightarrow \frac{IK}{IE} = \frac{IE}{ID}$ hay $IE^2 = IK \cdot ID$.

Bài 5 (1,0 điểm). Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$5x^4 + y^2 - 4x^2y - 85 = 0.$$

Lời giải.

Ta xem phương trình đã cho là phương trình bậc hai có ẩn là y , x là tham số.

Khi đó, ta được phương trình $y^2 - 4x^2y + 5x^4 - 85 = 0$.

Ta có $\Delta'_x = (-2x^2)^2 - (5x^4 - 85) = 4x^4 - 5x^4 + 85 = -x^4 + 85$.

Phương trình có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi $\Delta'_x > 0$.

Tức là $-x^4 + 85 > 0 \Leftrightarrow x^4 < 85 \Leftrightarrow x < \sqrt[4]{85} \text{ (} \approx 3,036 \text{)}$.

Vì x nguyên dương nên $x \in \{1; 2; 3\}$.

- Với $x = 1$, phương trình (*) trở thành

$$y^2 - 4y - 80 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 2\sqrt{21} \\ y = 2 - 2\sqrt{21} \end{cases} \text{ không thỏa mãn}$$

- Với $x = 2$, phương trình (") trở thành

$$y^2 - 16y - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 + \sqrt{69} \\ y = 8 - \sqrt{69} \end{cases} \text{ (không thỏa mãn)}.$$

- Với $x = 3$, phương trình (*) trở thành

$$y^2 - 36y + 320 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ y = 16 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x; y) \in \{(3; 20); (3; 16)\}$.

Bài 6 (1,0 điểm). Cho a, b, c là ba số thực không âm.

a) Chứng minh rằng $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$.

b) Giả sử $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1$.

Lời giải.

a) Với ba số thực không âm a, b, c , ta có

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab;$$

$$(b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 2bc + c^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc;$$

$$(a-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ac + c^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + c^2 \geq 2ac.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \quad (\text{điều phải chứng minh})$$

b) Vì $a+b+c=1$ nên bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq (a+b+c)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3abc} \leq 2(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3abc} \leq ab + bc + ca$$

$$\Leftrightarrow 3abc \leq (ab + bc + ca)^2$$

$$\Leftrightarrow 3abc(a+b+c) \leq (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + 2a^2bc + 2b^2ac + 2c^2ab$$

$$\Leftrightarrow (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 - a^2bc - b^2ac - c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(ab)^2 + 2(bc)^2 + 2(ca)^2 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ab)^2 - 2b^2ac + (bc)^2 + (bc)^2 - c^2ab + (ca)^2 + (ca)^2 - 2a^2bc + (ab)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2 \geq 0.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$. Bất đẳng thức cuối luôn đúng

với mọi số thực không âm a, b, c nên bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1$ được chứng minh.

Cách 2: Ta có $a+b+c=1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2=1$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2(ab + bc + ca).$$

Mà $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ (theo ý a)) nên $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3} \cdot 1^2 = \frac{1}{3}$.

Từ đó suy ra $1 - 2(ab + bc + ca) \leq 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức cô- si cho ba số thực không âm a, b, c , ta có

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow 1 \geq 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow abc \leq \frac{1}{27}.$$

Suy ra $2\sqrt{3abc} \leq 2 \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{1}{27}} = \frac{2}{3}$.

Từ (1), và (2) suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1.$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 7 (1,0 điểm). Cho đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại M và N . Kẻ một tiếp tuyến chung ngoài lần lượt tiếp xúc với đường tròn (O) và đường tròn (O') tại A và B . Chứng minh rằng $\frac{MA}{MB} + \frac{NB}{NA} - 2 \geq 0$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của MN và AB .

Xét $\triangle IAM$ và $\triangle INA$ có

- $\angle NIA$ góc chung.
- $\widehat{IAM} = \widehat{INA}$ (cùng chắn AM của (O)).

$\Rightarrow \triangle IAM \sim \triangle INA$ (góc - góc) $\Rightarrow \frac{IA}{IM} = \frac{IN}{IA}$ hay $IA^2 = IM \cdot IN$. Tương tự xét $\triangle IBM$ và $\triangle INB$ có

- $\angle NIB$: góc chung.
- $\widehat{IBM} = \widehat{INB}$ (cùng chắn BM của (O')).

$\Rightarrow \triangle IBM \sim \triangle INB$ (góc - góc)
 $\Rightarrow \frac{IB}{IM} = \frac{IN}{IB}$ hay $IB^2 = IM \cdot IN$.

Từ (1) và (2) suy ra $IA^2 = IB^2 (IM \cdot IN)$, suy ra $IA = IB$.

Vì $\triangle IAM \sim \triangle INA$ nên $\frac{IA}{IN} = \frac{MA}{NA}$.

Môn Toán

Dề cương ôn tập fuvền sinh vào Iớp 10 đ Long An

Lại vì $\triangle IBM \sim \triangle INB$ nên $\frac{IB}{IN} = \frac{MB}{NB}$ hay $\frac{IA}{IN} = \frac{MB}{NB}$ (do $IA = IB$).

Suy ra $\frac{MA}{NA} = \frac{MB}{NB} \left(\frac{IA}{IN} \right)$ hay $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$.

Áp dụng bất đẳng thức cô-si cho 2 số dương, ta có

$$\frac{MA}{MB} + \frac{NB}{NA} = \frac{NA}{NB} + \frac{NB}{NA} \geq 2\sqrt{\frac{NA}{NB} \cdot \frac{NB}{NA}} = 2.$$

Suy ra $\frac{MA}{MB} + \frac{NB}{NA} \geq 2$ hay $\frac{MA}{MB} + \frac{NB}{NA} - 2 \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{MA}{MB} = \frac{MB}{MA} \\ \frac{NA}{NB} = \frac{NB}{NA} \end{cases}$ hay MN là đường trung trực của AB .

-----HẾT-----