

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{x - \sqrt{x} - 3}{x - \sqrt{x} - 2} \right) : \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} - 2} + \frac{2}{\sqrt{x} - 2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh $P \leq \frac{1}{7}$

Câu 2.

a) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$

b) Cho phương trình $x^2 - (m - 1)x - m^2 + m - 2 = 0$ (1) (m là tham số). Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), tìm m để $Q = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^3$ đạt giá trị lớn nhất

Câu 3.

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T = (a - 1)^3 + (b - 1)^3 + (c - 1)^3$$

Câu 4.

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $M = n \cdot 4^n + 3^n$ chia hết cho 7.

Câu 5.

Cho tam giác đều ABC cố định nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua A và cắt cung nhỏ AB tại E (E không trùng với A, B). Đường thẳng d cắt hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) lần lượt tại M và N . Gọi F là giao điểm của MC và BN . Chứng minh rằng:

a) $\triangle CAN \sim \triangle BMA, \triangle MBC \sim \triangle BCN$

b) Bốn điểm B, M, E, F cùng nằm trên một đường tròn

c) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d thay đổi.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Với điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$ ta đặt $a = \sqrt{x}$. Khi đó:

$$P = \left(\frac{a+2}{a+1} - \frac{a^2-a-3}{(a+1)(a-2)} \right) : \left(\frac{a^2-a}{(a+1)(a-2)} + \frac{2}{a-2} \right) \\ = \frac{a^2-4-a^2+a+3}{(a+1)(a-2)} \cdot \frac{(a+1)(a-2)}{a^2-a+2a+2} = \frac{a-1}{a^2+a+2} = \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+2}$$

b) Ta có:

$$P \leq \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{a-1}{a^2+a+2} \leq \frac{1}{7} \Leftrightarrow 7a-7 \leq a^2+a+2 \Leftrightarrow (a-3)^2 \geq 0$$

Do bất đẳng thức cuối đúng với mọi a nên ta có điều phải chứng minh

Câu 2.

a) Ta xét các trường hợp sau :

$$*) x < 0 \Rightarrow VT > VP$$

$$*) 0 \leq x < 2 \Rightarrow VT > \frac{1}{2}x + 3 + 5 > \frac{x}{2} + 3 + \frac{5x}{2} = 3x + 3 > 3x + \sqrt{x^2 + 5} = VP$$

$$*) x \geq 2 \Rightarrow VP \geq 3x + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = \sqrt{x^2 + 3x^2} + \frac{5x}{3} + \frac{5}{3} \geq \sqrt{x^2 + 3 \cdot 4} + \frac{10}{3} + \frac{5}{3} = VP$$

Kiểm tra thấy $x = 2$ là nghiệm thỏa mãn nên nó là nghiệm duy nhất của phương trình .

$$b) \text{ Phương trình (1) có nghiệm } \Leftrightarrow (m-1)^2 - 4(-m^2 + m - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 6m + 9 \geq 0$$

Điều này đúng với mọi m do $5m^2 - 6m + 9 = 4m^2 + (m-3)^2$.

Theo hệ thức Vi - et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 x_2 = -m^2 + m - 2 \end{cases}$. Khi đó:

$$Q = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right)^2 - 3 \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right)$$

$$\text{Xét } t = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{3m^2 - 4m + 5}{-m^2 + m - 2}$$

$$\Rightarrow (t+3)m^2 - (t+4)m + 2t + 5 = 0(2)$$

Điều kiện tồn tại m là $(t+4)^2 - 4(t+3)(2t+5) \geq 0 \Leftrightarrow (7t+22)(t+2) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{22}{7} \leq t \leq -2$

Do đó $Q = t^3 - 3t = -2 + (t-1)^2(t+2) \leq -2 (\forall t \leq -2)$

Vậy $\text{Max } Q = -2 \Leftrightarrow t = -2$ hay $m = 1$

Câu 3.

Để ý $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ nếu $x + y + z = 0$. Do đó:

$$T = 3(a-1)(b-1)(c-1) = 3ab(c-1) - 3c(a+b) + 3(a+b+c) - 3 = 3ab(c-1) - 3c(a+b) + 6$$

Không giảm tổng quát, ta giả sử: $c = \min\{a, b, c\}$, giả thiết suy ra $0 \leq c \leq 1$. Khi đó, sử

dụng: $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, ta có:

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{3}{4}(a+b)^2(c-1) - 3c(3-c) + 6 \\ &= \frac{3}{4}(3-c)^2(c-1) - 3c(3-c) + 6 = \frac{3c}{4}[c^2 + 3(1-c)] - \frac{3}{4} \geq -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Với } a = b = \frac{3}{2}, c = 0 \Rightarrow \text{Min } T = -\frac{3}{4}$$

Câu 4.

$$*) \text{ Nếu } n = 2k \Rightarrow M = 2k \cdot 4^{2k} + 3^{2k} = (2k+1) \cdot 2^{4k} - (4^{2k} - 3^{2k})$$

$$\text{Vì } (4^{2k} - 3^{2k}) \vdots 7 \Rightarrow (2k+1) \cdot 2^{4k} \vdots 7. \text{ Mà } (2^{4k}, 7) = 1 \Rightarrow 2k+1 = 7m \Leftrightarrow 2k = 7m_1 + 6$$

với m_1 chẵn

Do đó, $n = 14t + 6 (t \in \mathbb{Z})$. Thử lại ta có:

$$M = (14t+6) \cdot 4^{14t+6} + 3^{14t+6} = (14t+7) \cdot 4^{14t+6} - (16^{7t+3} - 9^{7t+3}) \vdots 7$$

$$*) \text{ Nếu } n = 2k+1 \Rightarrow M = (2k+1) \cdot 4^{2k+1} + 3^{2k+1} = 2k \cdot 4^{2k+1} + (4^{2k+1} + 3^{2k+1}).$$

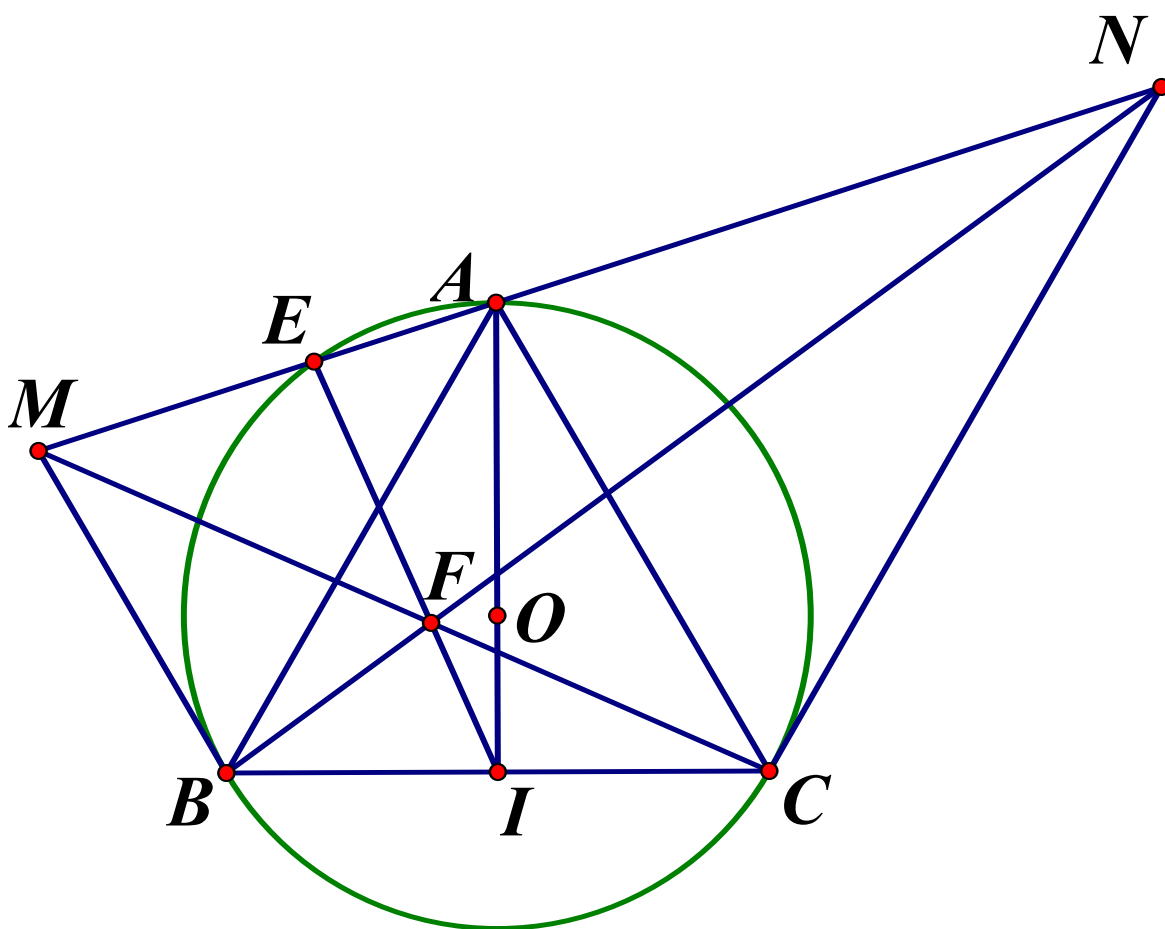
Vì $4^{2k+1} + 3^{2k+1}$ chia hết cho 7 nên $2k \cdot 4^{2k+1} \div 7$. Mà $(2^{4k+3}, 7) = 1$ nên $k = 7t$.

Do đó $n = 14t + 1, t \in \mathbb{N}$. Thử lại ta có:

$$M = (14t + 1).4^{14t+1} + 3^{14t+1} = 14t.14^{14t+1} + (4^{14t+1} + 3^{14t+1}); 7$$

Vậy các số nguyên dương n thỏa mãn $M = n.4^n + 3^n$ chia hết cho 7 là $n = 14t + 1$ và $n = 14t + 6$ với $t \in \mathbb{N}$

Câu 5.



a) Xét $\triangle CAN$ và $\triangle BMA$ có:

$$\begin{aligned} \square CAN &= \square BMA (do\ AB // CN); \angle CNA = \angle BAM (do\ AB // CN) \\ \Rightarrow \Delta CAN &\square \Delta BMA (g.g) \end{aligned}$$

Xét $\triangle MBC$ và $\triangle BCN$ có $\angle MBC = \angle BCN = 120^\circ$ và $\frac{MB}{BC} = \frac{MC}{AC} = \frac{AB}{NC} = \frac{BC}{NC}$

$\Rightarrow \triangle MBC \sim \triangle BCN (c.g.c)$

b) Ta có: $\angle MFB = \angle CFN = 180^\circ - \angle FCN - \angle FNC = 180^\circ - \angle FCN - \angle MCB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Ta cũng có $\angle MEB = 180^\circ - \angle AEB = \angle ACB = 60^\circ$

Do đó $\angle MFB = \angle MEB \Rightarrow B, M, E, F$ cùng nằm trên một đường tròn.