

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH THUẬN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

Giải phương trình : $6\sqrt{2x+5} + 4\sqrt{x+2} = 3x + 20$

Câu 2. (1,0 điểm)

Hai bạn An và Bình đang so về số lượng những viên bi mà hai bạn hiện có. An nói với Bình rằng :”Nếu bạn cho tôi một số viên bi từ túi của bạn thì tôi sẽ có số viên bi gấp 6 lần số viên bi của bạn. Còn nếu tôi cho bạn số viên bi như thế, số viên bi của bạn sẽ bằng $\frac{1}{3}$ số viên bi của tôi”. Hỏi số viên bi ít nhất mà bạn An có thể có là bao nhiêu ?

Câu 3. (2,0 điểm)

- a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^4 + x^2 - y^2 - y + 4$
- b) Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh rằng $abc : 60$

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2024}{ab + bc + ca}$

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE

- a) Chứng minh A, I, O thẳng hàng và I thuộc đường tròn (O)
- b) Các phân giác trong của các góc B và C cắt đường thẳng DE lần lượt tại M và N. Chứng minh tứ giác BCMN nội tiếp và tam giác BMC vuông

Câu 6. (1,0 điểm)

Người ta viết các số nguyên 1,2,3,4,5,6,7,8 lên các đỉnh của một bát giác lồi sao cho tổng các số ở mỗi ba đỉnh liên tiếp không nhỏ hơn k, với k nguyên dương. Tìm giá trị lớn nhất của k

**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2022-2023
Môn thi : TOÁN (Chuyên)
Thời gian làm bài : 150 phút**

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

Giải phương trình : $6\sqrt{2x+5} + 4\sqrt{x+2} = 3x + 20$ (1)

Điều kiện $x \geq -2$. Ta có

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow [(2x+5) - 6\sqrt{2x+5} + 9] + [(x+2) - 4\sqrt{x+2} + 4] = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x+5} - 3)^2 + (\sqrt{x+2} - 2)^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5} = 3 \\ \sqrt{x+2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (tmđk)}\end{aligned}$$

Vậy $x = 2$

Câu 2. (1,0 điểm)

Hai bạn An và Bình đang so về số lượng những viên bi mà hai bạn hiện có. An nói với Bình rằng :”Nếu bạn cho tôi một số viên bi từ túi của bạn thì tôi sẽ có số viên bi gấp 6 lần số viên bi của bạn. Còn nếu tôi cho bạn số viên bi như thế, số viên bi của bạn sẽ bằng $\frac{1}{3}$ số viên bi của tôi”. Hỏi số viên bi ít nhất mà bạn An có thể có là bao nhiêu ?

Gọi số bi của An có là x , số bi của Bình có là y và k là số bi thay đổi mà An đang nói đến ($x, y, k \in \mathbb{N}^*$)

Theo giả thiết ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x+k=6(y-k) & (1) \\ x-k=3(y+k) & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+4k \\ y=\frac{11}{3}k \end{cases} \quad (3)$$

Số viên bi ít nhất mà bạn An có thể có ứng với x nhỏ nhất, mà $x, y, k \in \mathbb{N}^*$ nên từ (3) ta suy ra $k=3; y=11 \Rightarrow x=45$

Vậy số bi ít nhất mà bạn An có thể có là 45 viên bi

Câu 3. (2,0 điểm)

c) Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^4 + x^2 - y^2 - y + 4$

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 - y^2 - y + 4 = 0 &\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -4 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y + 1)(x^2 - y) = (-1).4 = 4.(-1) \quad (\text{do } x^2 + y + 1 + x^2 - y = 2x^2 + 1 > 0)\end{aligned}$$

$$Th1: \begin{cases} x^2 + y + 1 = -1 \\ x^2 - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = -2 \\ x^2 - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ x^2 - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$Th2: \begin{cases} x^2 + y + 1 = 4 \\ x^2 - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 3 \\ x^2 - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x; y) = (1; -3), (-1; -3), (1; 2), (-1; 2)$

d) Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh rằng $abc \vdots 60$

*) Ta có a hoặc b chia hết cho 3 $\Rightarrow abc \vdots 3$. a và b cùng không chia hết cho 3

Suy ra $a^2 + b^2$ chia cho 3 dư 2 (vì số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1)

$\Rightarrow c^2$ chia cho 3 dư 2, mâu thuẫn với số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1. Do đó a và b cùng không chia hết cho 3 không xảy ra. Vậy $abc \vdots 3(1)$

*) Ta có a và b cùng chẵn $\Rightarrow ab \vdots 4 \Rightarrow abc \vdots 4$

Nếu a và b cùng lẻ suy ra c là số lẻ mặt khác số chính phương lẻ chia 4 dư 1

Do đó a^2, b^2 chia cho 4 có dư là 1 suy ra c^2 chia cho 4 dư 2 điều này mâu thuẫn với số chính phương chẵn chia 4 dư 0 ($a^2 + b^2 = c^2$ là số chẵn), do đó a và b cùng lẻ không xảy ra

Trường hợp a và b không cùng tính chẵn lẻ và do a, b có vai trò như nhau nên ta giả sử a là số chẵn và b là số lẻ

Ta có b^2, c^2 chia cho 8 dư 1 (vì số chính phương lẻ chia 8 dư 1)

Suy ra $c^2 - b^2$ chia hết cho 8 $\Rightarrow c^2 - b^2 = a^2 \vdots 8 \Rightarrow a \vdots 4 \Rightarrow abc \vdots 4(2)$

*) Ta có a hoặc b chia hết cho 5 $\Rightarrow ab \vdots 5 \Rightarrow abc \vdots 5$

a và b cùng không chia hết cho 5 suy ra a^2, b^2 chia cho 5 dư 1 hoặc 4 (vì số chính phương chia 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4)

Suy ra $a^2 + b^2$ chia cho 5 dư 0, 2 hoặc 3 $\Rightarrow c^2$ chia cho 5 dư 0, 2 hoặc 3

Mặt khác số chính phương chia cho 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4

Do đó $c^2 \vdots 5 \Rightarrow c \vdots 5 \Rightarrow abc \vdots 5(3)$

Ta có abc chia hết cho 3, 4, 5 mà $BCNN(3; 4; 5) = 60 \Rightarrow abc \vdots 60$

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2024}{ab + bc + ca}$

$$\text{Ta có : } P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{ab + bc + ca} + \frac{2022}{ab + bc + ca}$$

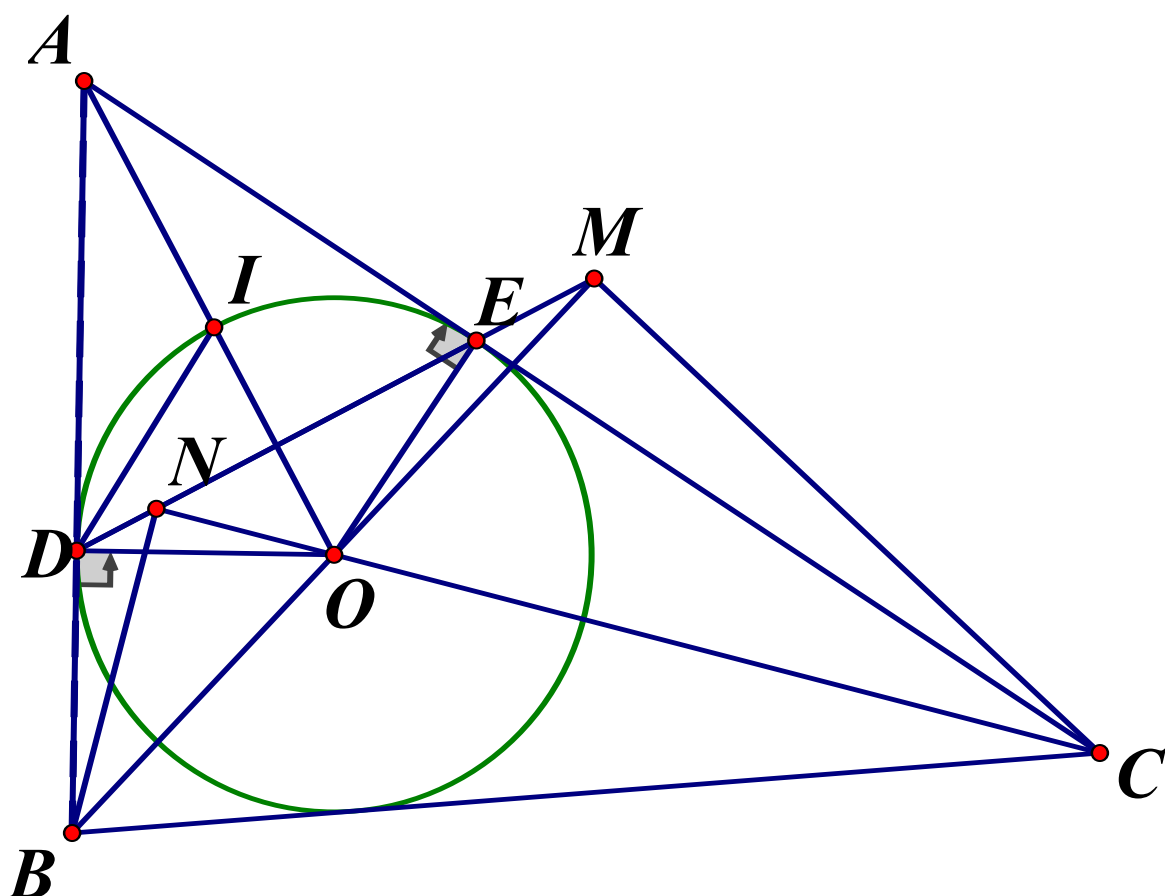
$$= \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4}{2ab + 2bc + 2ca} \right) + \frac{2022}{ab + bc + ca}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{(1+2)^2}{(a+b+c)^2} + \frac{2022}{\frac{(a+b+c)^2}{3}} \geq \frac{9}{9} + \frac{2022}{3} = 675$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 675 \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE



c) Chứng minh A, I, O thẳng hàng và I thuộc đường tròn (O)

*Ta có $AD = AE$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A suy ra $\angle ADE = \angle AED \Rightarrow 2\angle IDE = 2\angle IED$ (vì DI, EI là hai phân giác của góc $ADE, \angle AED$) $\Rightarrow \triangle IDE$ cân tại I nên $ID = IE$

Ta có $AD = AE$ (cmt), $ID = IE$ (cmt), $OD = OE (= R)$

Suy ra $O, I, A \in$ trung trực của DE , suy ra A, I, O thẳng hàng và $OA \perp DE$

*Do $OA \perp DE \Rightarrow \angle IDE + \angle DIO = 90^\circ$ và $\angle IDA + \angle IDO = 90^\circ$ mà $\angle IDA = \angle IDE$

Nên $\angle DIO = \angle IDO \Rightarrow \triangle IDO$ cân tại O

Suy ra $OI = OD \Rightarrow I$ thuộc đường tròn (O)

d) Các phân giác trong của các góc B và C cắt đường thẳng DE lần lượt tại M và N . Chứng minh tứ giác $BCMN$ nội tiếp và tam giác BMC vuông

Ta có : $\angle MOC$ là góc ngoài của $\triangle BOC$

$$\Rightarrow \angle MOC = \angle OBC + \angle OCB = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} \quad (1)$$

Ta có $\triangle ADE$ cân tại A nên $\angle AED = \angle MEC = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle MOC = \angle MEC \Rightarrow EMCO$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle EMO = \angle ECO$ mà $\angle ECO = \angle BCO$ (CO là phân giác của góc C)

Nên $\angle EMO = \angle OCB \Rightarrow \angle NMB = \angle NCB \Rightarrow BCMN$ là tứ giác nội tiếp

Ta có tứ giác $EMCO$ nội tiếp $\Rightarrow \angle OMC = \angle OEC$ mà $\angle OEC = 90^\circ$

Nên $\angle OMC = 90^\circ \Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$. Vậy $\triangle BMC$ vuông tại M

Câu 6. (1,0 điểm)

Người ta viết các số nguyên $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ lên các đỉnh của một bát giác lồi sao cho tổng các số ở mỗi ba đỉnh liên tiếp không nhỏ hơn k , với k nguyên dương. Tìm giá trị lớn nhất của k

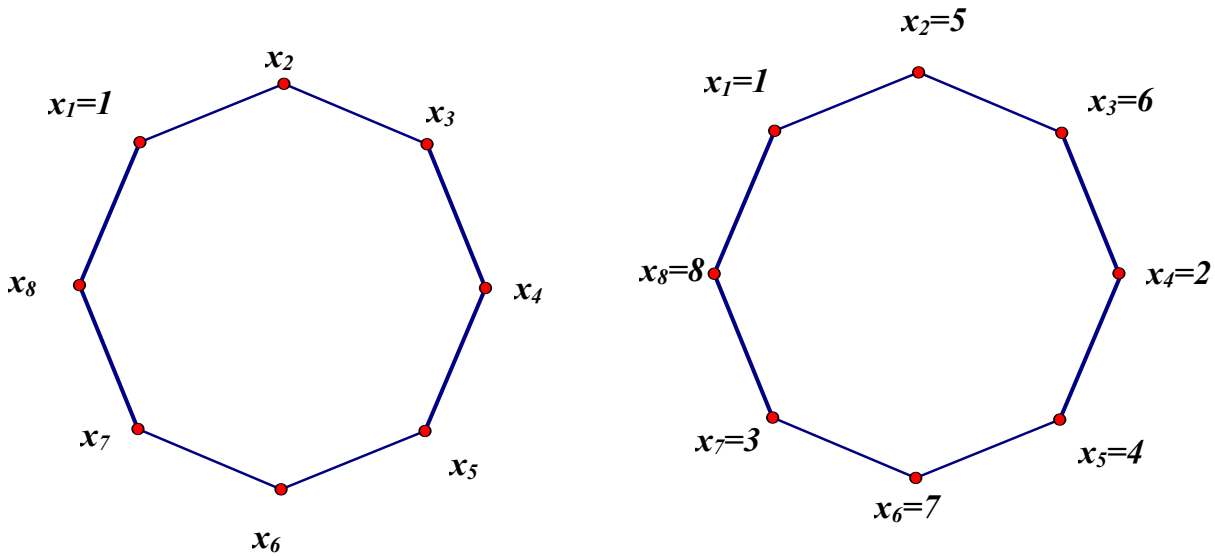
*) Xét $x_i = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}, i = \overline{1; 8}$ là các số ở 8 đỉnh của bát giác theo một thứ tự nào đó. Theo giả thiết ta có :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \geq k \\ x_2 + x_3 + x_4 \geq k \\ \dots\dots\dots \\ x_8 + x_1 + x_2 \geq k \end{array} \right. \& (6 = 1 + 2 + 3 \leq k \leq 6 + 7 + 8 = 21)$$

Cộng vế theo vế các bất phương trình trên ta được :

$$3(x_1 + x_2 + \dots + x_8) \geq 8k \Leftrightarrow 3.36 \geq 8k \Leftrightarrow k \leq 13,5$$

Do $k \in \mathbb{N}^*$ nên $k \leq 13$. Ta cần chứng minh $k=13$ không thỏa mãn đề bài



- Giả sử $x_1 = 1$ khi đó x_2, x_3 không thể nhận số 2 hoặc số 3, tương tự ta có x_7, x_8 không thể nhận số 2 hoặc số 3 vì tổng 3 đỉnh liên tiếp bé hơn 13, từ đó suy ra số 2 và 3 được đánh số vào các đỉnh x_4, x_5, x_6 , đồng thời số 2 và 3 không nằm liên tiếp trên hai đỉnh x_4, x_5 hoặc x_5, x_6 vì khi đó $x_3 = 8$ và $x_8 = 8$, điều này vô lý vì có hai số 8
- Do đó ta có hai trường hợp $x_4 = 2, x_5 = 8, x_6 = 3$ hoặc $x_4 = 3, x_5 = 8, x_6 = 2$. ta có các số còn lại 4, 5, 6, 7 sẽ điền vào các vị trí x_2, x_3, x_7, x_8 . Ta có $x_1 + x_2 + x_3 \geq 13$ và

$$x_1 + x_8 + x_7 \geq 13$$

$$\text{Suy ra } x_2 + x_3 \geq 12, x_7 + x_8 \geq 12 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_7 + x_8 \geq 24$$

Mà $4 + 5 + 6 + 7 = 22 < 24$ điều này mâu thuẫn. Do đó không tồn tại $k = 13$

Trong trường hợp $k = 12$ ta dễ dàng đưa ra cách đánh số như sau :

$$x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 2, x_5 = 4, x_6 = 7, x_7 = 3, x_8 = 8$$

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm của k là $k = 12$