

Bài 1 (6,0 điểm). Cho một số thực a lớn hơn 1 và một số nguyên dương n .

- Giả sử n chẵn và $Q(x)$ là một đa thức bậc n có hệ số cao nhất bằng 1 và có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại k nguyên dương sao cho đa thức $P(x) = x^{n+1} + a^k Q(x)$ có $n + 1$ nghiệm thực phân biệt.
- Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện

(i) $|a_i| = a^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

(ii) $P(x)$ có n nghiệm thực phân biệt.

(iii) Nếu n chẵn thì số nghiệm âm và số nghiệm dương của $P(x)$ bằng nhau; nếu n lẻ thì số nghiệm âm và số nghiệm dương của $P(x)$ hơn kém nhau 1 đơn vị.

Bài 2 (7,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của BC và D là một điểm bất kì trên đoạn AM (D khác A và M). Đường tròn tâm P và Q lần lượt ngoại tiếp các tam giác ABD và ACD . Đường đối trung qua A của tam giác ABC cắt (O) lần thứ hai tại N .

- Chứng minh hai tam giác OPQ và NBC đồng dạng, từ đó chứng minh OA là đường đối trung của tam giác OPQ .
- Gọi R là giao điểm của PQ và BC . Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác RBP và RCQ cắt nhau tại T . Chứng minh rằng năm điểm T, A, O, M, N đồng viên.

Bài 3 (7,0 điểm). Với mỗi số nguyên dương n , xét tập hợp $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Người ta tô màu cho tất cả các phần tử của S , mỗi phần tử được tô bởi đúng một trong hai màu xanh hoặc đỏ một cách ngẫu nhiên sao cho mỗi màu đều được dùng ít nhất một lần.

- Tính số cách tô màu thỏa mãn điều kiện trong các số được tô màu xanh, không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp.
- Tính xác suất của biến cố: “Số lớn nhất trong các số được tô màu xanh lớn hơn số nhỏ nhất trong các số được tô màu đỏ”.

————HẾT————

Họ và tên thí sinh : Số báo danh

Họ và tên, chữ ký của CBCT 1:

Họ và tên, chữ ký của CBCT 2: