

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÒA BÌNH**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN
NĂM HỌC 2022-2023**

Môn : TOÁN (DÀNH CHO CHUYÊN TIN)

Thời gian làm bài : 150 phút

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I (3,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

2) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$

3) Giải phương trình $|x-2| = 2x-1$

Câu II. (3,0 điểm)

1) Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a và b để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; 3)$ và song song với đường thẳng $(d): y = 5x + 3$

2) Để hưởng ứng ngày Tết trồng cây, một tổ có 13 học sinh cả nam và nữ tham gia trồng được 80 cây. Biết tổng số cây mà các bạn nam trồng được bằng tổng số cây mà các bạn nữ trồng được, số cây mà mỗi bạn học sinh nam trồng được nhiều hơn số cây mỗi bạn nữ trồng được là 3 cây. Tính số học sinh nam, học sinh nữ của tổ đó (số cây mỗi bạn nam trồng được là bằng nhau và số cây mỗi bạn nữ trồng được bằng nhau).

3) Cho số thực x dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

Tính giá trị biểu thức: $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Câu III. (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm (O) và một điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Vẽ các tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm), vẽ một cát tuyến di động AMN ($AM < AN$) với (O) . Gọi E là trung điểm của MN , CE cắt (O) tại điểm thứ hai là I .

1) Chứng minh rằng: Năm điểm A, B, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh rằng: BI song song với MN .

3) Chứng minh rằng: $EB = EI$

4) Xác định vị trí của cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN đạt giá trị lớn nhất.

Câu IV. (1,0 điểm)

1) Cho $0 < a, b < 1$, chứng minh rằng: $\sqrt{a-ab} + \sqrt{b-ab} \leq 1$

2) Giải phương trình: $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = x^2 - 8x + 18$

ĐÁP ÁN

Câu I (3,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

$$A = \frac{2\sqrt{5}}{5-3} = \sqrt{5}$$

2) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$

Học sinh tự vẽ

3) Giải phương trình $x-2 = 2x-1$

+ Nếu $x \geq 2$ ta được phương trình: $x-2 = 2x-1 \Leftrightarrow x = -1$ (loại)

+ Nếu $x < 2$ ta được phương trình: $-x+2 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

KL ...

Câu II. (3,0 điểm)

1) Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a và b để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; 3)$ và song song với đường thẳng $(d'): y = 5x + 3$

Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; 3)$ nên có phương trình $-a + b = 3$ (1)

Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (d') nên $\begin{cases} a = 5 \\ b \neq 3 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a = 5 \\ b = 8 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-1; 3)$ và song song với đường thẳng

$(d'): y = 5x + 3$ thì $\begin{cases} a = 5 \\ b = 8 \end{cases}$ hay đường thẳng $(d): y = 5x + 8$

2) Để hưởng ứng ngày Tết trồng cây, một tổ có 13 học sinh cả nam và nữ tham gia trồng được 80 cây. Biết tổng số cây mà các bạn nam trồng được bằng tổng số cây mà các bạn nữ trồng được, số cây mà mỗi bạn học sinh nam trồng được nhiều hơn số cây mỗi bạn nữ trồng được là 3 cây. Tính số học sinh nam, học sinh nữ của tổ đó (số cây mỗi bạn nam trồng được là bằng nhau và số cây mỗi bạn nữ trồng được bằng nhau).

Gọi số học sinh nam của tổ là x ($0 < x < 13, x \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow$ Số học sinh nữ của tổ là: $13 - x$

Số cây mà một học sinh nam trồng được là: $\frac{40}{x}$ (cây)

Số cây mà một học sinh nữ trồng được là: $\frac{40}{13-x}$ (cây)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{40}{x} - 3 = \frac{40}{13-x}$

Giải phương trình ta được $x_1 = 5$ (TMĐK), $x_2 = \frac{104}{3}$ (loại).

KL...

3) Cho số thực x dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

Tính giá trị biểu thức: $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

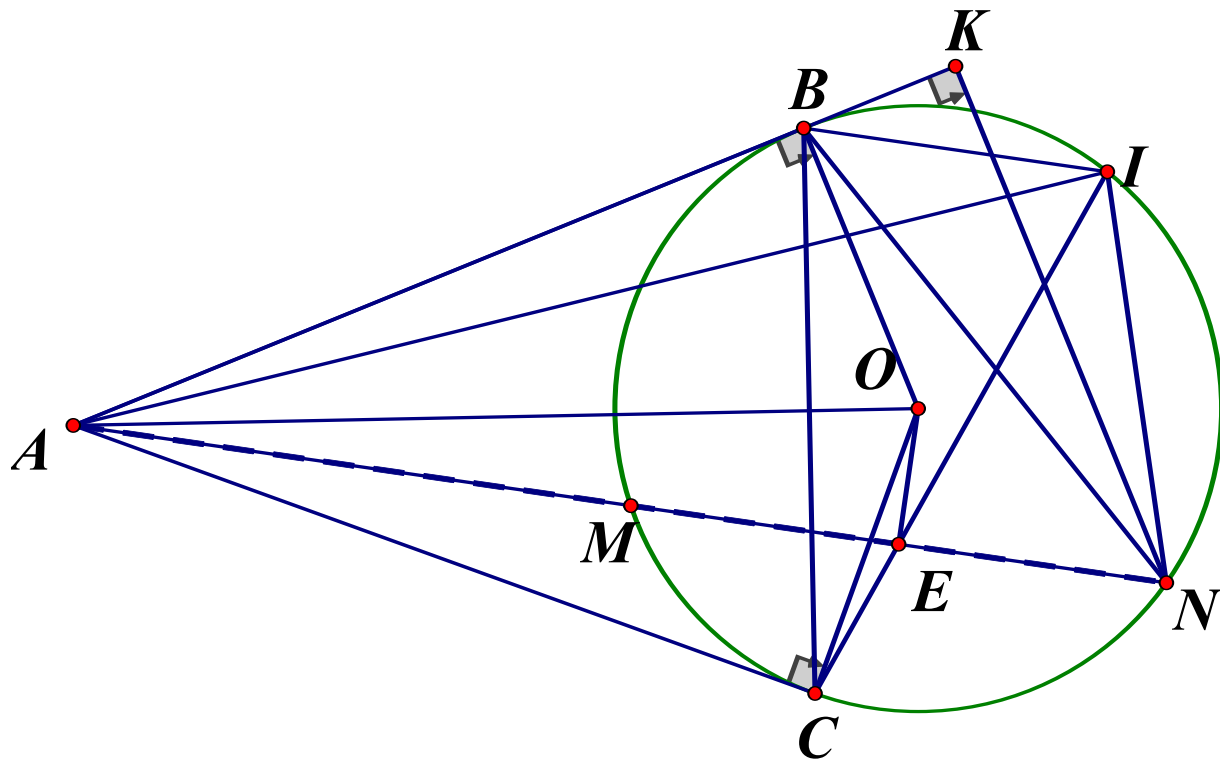
Từ giả thiết $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ suy ra: $x + \frac{1}{x} = 3$ (do $x > 0$)

$$\Rightarrow 21 = x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3$$

$$\Rightarrow A = x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

Câu III. (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm (O) và một điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Vẽ các tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm), vẽ một cát tuyến di động AMN ($AM < AN$) với (O) . Gọi E là trung điểm của MN , CE cắt (O) tại điểm thứ hai là I .



1) Chứng minh rằng: Năm điểm A, B, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có $OB \perp AB$ (Tính chất tiếp tuyến và bán kính) $\Rightarrow \angle ABO = 90^\circ$

Tương tự ta có $\angle ACO = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $ABOC$ nội tiếp (Tổng hai góc đối bằng 180°) (1)

Vì E là trung điểm của MN nên $OE \perp MN \Rightarrow \angle AEO = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $AEOB$ nội tiếp (Tổng hai góc đối bằng 180°) (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm A, B, O, C, E cùng thuộc một đường tròn đường kính AO .

2) Chứng minh rằng: BI song song với MN .

Trong đường tròn đường kính AO ta có:

$$\widehat{ABC} = \widehat{AEC} \text{ (cùng chắn cung AC)}$$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{BIC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC) $\Rightarrow \widehat{AEC} = \widehat{BIC} \Rightarrow BI // MN$

3) Chứng minh rằng: $EB = EI$

Ta có $\widehat{IBE} = \widehat{BEA}$ (so le trong)

Mà $\widehat{BEA} = \widehat{BCA} = \widehat{BIC}$ suy ra $\widehat{IBE} = \widehat{BEA}$ nên $EB = EI$

4) Xác định vị trí của cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN đạt giá trị lớn nhất.

$BI // MN \Rightarrow BI // AN \Rightarrow S_{AIN} = S_{ABN}$ (vì có chung đáy AN và chiều cao hạ từ đỉnh B và đỉnh I bằng nhau).

Kẻ NK vuông góc với đường thẳng AB $\Rightarrow S_{AIN} = S_{ABN} = \frac{1}{2} AB \cdot NK$

Ta có AB không đổi $\Rightarrow S_{AIN}$ đạt giá trị lớn khi NK đạt giá trị lớn nhất.

Mà $NK \leq NB \leq 2R \Rightarrow NK_{\max} = 2R$ khi và chỉ khi N đối xứng với B qua O

Câu IV. (1,0 điểm)

1) Cho $0 < a, b < 1$, chứng minh rằng: $\sqrt{a-ab} + \sqrt{b-ab} \leq 1$

Vì $0 < a, b < 1$ nên $\sqrt{a-ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{1-b} \leq \frac{a+1-b}{2}$

Tương tự ta có $\sqrt{b-ab} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{1-a} \leq \frac{b+1-a}{2}$

Do đó $\sqrt{a-ab} + \sqrt{b-ab} \leq \frac{a+1-b}{2} + \frac{b+1-a}{2} = 1$ (đpcm)

2) Giải phương trình: $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = x^2 - 8x + 18$

ĐK: $3 \leq x \leq 5$

Học sinh chứng minh được: $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}, \forall a, b \in R$

Áp dụng ta được $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} \leq \sqrt{2(x-3+5-x)} = 2, \forall x: 3 \leq x \leq 5$

Ta có $x^2 - 8x + 18 = (x-4)^2 + 2 \geq 2, \forall x \in R$

Do đó phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = 2 \\ x^2 - 8x + 18 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

KL ...