

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH PHÚC**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC: 2024 – 2025**

ĐỀ THI MÔN: TOÁN – CHUYÊN

**Dành cho thí sinh thi chuyên Toán và
chuyên Tin**

**Thời gian làm bài: 150 phút
(Không kể thời gian giao đề)**

Câu 1: Giải các phương trình

a) $\sqrt{3x-2} + 3\sqrt{x+2} = 8$

b) $(x-3)(x-2)(x+1)(x+6) = 28x^2$

Câu 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 3x^2 - 3x + 1 \\ xy + x + 2y = 1 \end{cases}$$

Câu 3:

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $4k^4 + 1$ với k là một số tự nhiên

b) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n để $n^2 + 1$ là ước số của $Q = 1.2.3 \dots n$

Câu 4: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 2(a + b + c)$

a) Chứng minh rằng $a + b + c \leq 6$ và $(a+1)(b+1)(c+1) \leq 27$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $F = (a+1)(b+1)(c+1)$

Câu 5: Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) và $BAC = 60^\circ$. Các đường thẳng qua C và B song song với AO cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và F (E khác C , F khác B). Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Đường thẳng BH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là X (X khác B); đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Y (Y khác C).

a) Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác HBC

b) Gọi M là giao điểm của XF với AC và N là giao điểm của YE với AB . Chứng minh $MN \parallel BC$.

c) Chứng minh ba đường thẳng MN, XY, FE đồng quy.

Câu 6: Cho tập A gồm 2025 số tự nhiên liên tiếp. Một tập con B của A được gọi là tập con có tính chất “nodiv” nếu hai phân tử a, b ($a > b$) bất kì thuộc tập B đều thỏa mãn điều kiện $a + b$ không chia hết cho $a - b$.

a) Chỉ ra một tập con B của A có tính chất “nodiv” mà B có đúng 675 phần tử

b) Nếu B là một tập con của A có tính chất “nodiv” thì B có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

ĐÁP ÁN

Bài 1:

a) Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$

Nếu $x > 2$ thì $\sqrt{3x-2} + 3\sqrt{x+2} > \sqrt{4} + 3\sqrt{4} = 8$, mâu thuẫn

Nếu $\frac{2}{3} \leq x < 2$ thì $\sqrt{3x-2} + 3\sqrt{x+2} < \sqrt{4} + 3\sqrt{4} = 8$, mâu thuẫn

Do đó, $x = 2$

Thử lại thỏa mãn

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2 + 6 - 5x)(x^2 + 6 + 7x) = 28x^2$$

Đặt $a = x^2 + x + 6$ thì ta có $(a - 6x)(a + 6x) = 28x^2$

Hay $a^2 - 36x^2 = 28x^2$

Từ đó $a = 8x$ hoặc $a = -8x$

Xét các trường hợp cụ thể, ta tìm được tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = 1, x = 6, x = \frac{-9 + \sqrt{57}}{2}; x = \frac{-9 - \sqrt{57}}{2}$$

Bài 2:

Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành $y^3 = (1-x)^3$

Từ đó $y = 1 - x$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $x(1-x) + x + 2(1-x) = 1$

Giải phương trình này, ta được $x = 1$ (tương ứng $y = 0$)

hoặc $x = -1$ (tương ứng, $y = -2$)

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1; 0)$ và $(-1; 2)$

Bài 3:

a) Ta có: $p = 4k^4 + 1 = (2k^2 - 2k + 1)(2k^2 + 2k + 1)$

Vì p là một số nguyên tố và $(2k^2 - 2k + 1) \leq (2k^2 + 2k + 1)$ nên $2k^2 - 2k + 1 = 1 \Rightarrow k \in \{0; 1\}$

Thử lại, ta được $k = 1$ và $p = 5$

Vậy có duy nhất một số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài là $p = 5$.

b) Chọn $n = 2a^2$ với a là một số nguyên bất kỳ thỏa mãn $a \equiv 1 \pmod{5}, a > 10^{69}$

Ta có: $n^2 + 1 = 4a^4 + 1 = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1) = 5 \cdot \frac{2a^2 + 2a + 1}{5} \cdot (2a^2 - 2a + 1)$

Vì $a \equiv 1 \pmod{5}$ nên $\frac{2a^2 + 2a + 1}{5}$ là một số nguyên

Ngoài ra, do $a > 10^{69}$ nên dễ thấy

$$5 < \frac{2a^2 + 2a + 1}{5} < 2a^2 - 2a + 1 < 2a^2.$$

Vì vậy $5 \cdot \frac{2a^2 + 2a + 1}{5} \cdot (2a^2 - 2a + 1) = 4a^4 + 1$

Từ đây, ta suy ra đpcm

Bài 4:

a) Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwartz, ta có

$$2(a+b+c) = a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Từ đây, ta dễ dàng suy ra $0 \leq a+b+c \leq 6$

Từ giả thiết, ta có $2a+2 = a^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a \geq -1$

Tương tự ta cũng có $b \geq -1; c \geq -1$

Suy ra $a+1, b+1, c+1$ là các số không âm

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM – GM kết hợp với kết quả $0 \leq a+b+c \leq 6$ vừa chứng minh ở trên, ta được

$$(a+1)(b+1)(c+1) \leq \left(\frac{a+1+b+1+c+1}{3} \right)^3 \leq 27$$

b) Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$

từ giả thiết ta có $a+b+c \geq 0$

Vì thế $a \geq \frac{a+b+c}{3} \geq 0$

Bây giờ, ta có

$$(b+1)(c+1) = bc + b + c + 1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2(a+b+c)}{2}$$

$$= \frac{(b+c)^2 + a^2 - 2a + 2}{2} \geq \frac{a^2 - 2a + 2}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức này, ta được

$$F \geq \frac{(a+1)(a^2 - 2a + 2)}{2} = \frac{a^3 - a^2 + 2}{2}$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} + \frac{4}{27} \geq a^2$$

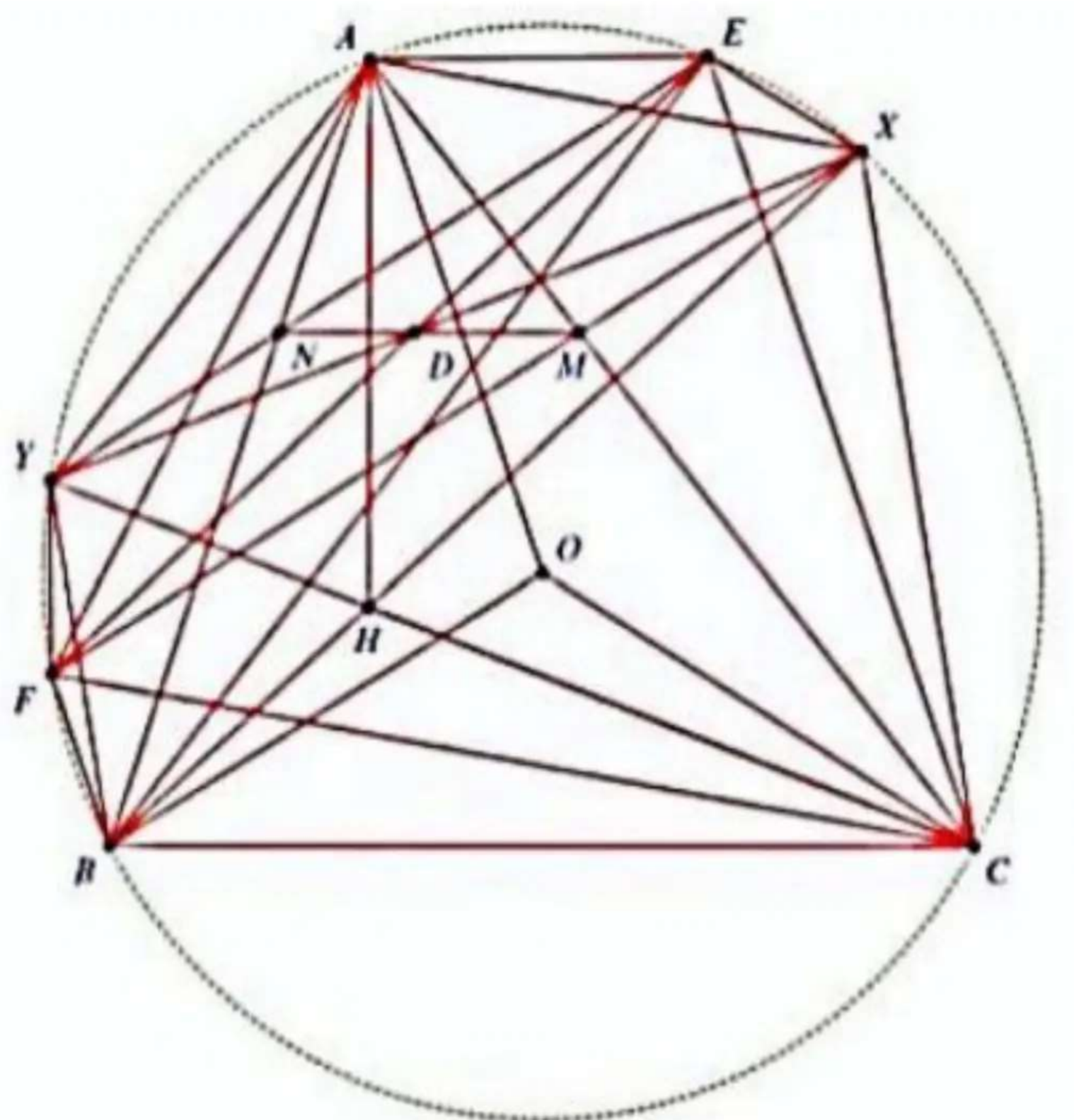
$$\text{Do đó, } F \geq \frac{-\frac{4}{27} + 2}{2} = \frac{25}{27}$$

Mặt khác, với $a = b = \frac{2}{3}, c = -\frac{2}{3} \Rightarrow F = \frac{25}{27}$

Vậy $\min F = \frac{25}{27}$.

Bài 5:

Xét thể hình như hình vẽ bên



a) Ta có: $\angle AFE = \angle ACE = \angle OAC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOC = 90^\circ - \angle ABC = \angle HCB$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\angle AEF = \angle HBC$

Từ đó suy ra hai tam giác AEF và HBC đồng dạng (g – g)

b) Vì $BF \parallel CE$ nên $EF = BC$

Mà hai tam giác AEF và HBC đồng dạng (theo câu a) nên hai tam giác này cũng bằng nhau

Suy ra $AE = HB$ và $AF = HC$

Mà $HB = BY$ và $HC = CX$ (tính chất của trục tâm)

Nên $AE = HB = BY$ và $AF = HC = CX$

Vì $AE = BY$ nên tứ giác AEBY là hình thang cân

Suy ra $\frac{AN}{NB} = \frac{AY}{BE}$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\frac{AM}{MC} = \frac{AX}{CF}$

Mặt khác ta lại có $AY = AX = AH$ (theo tính chất của trục tâm) và $BE = CF$ (do tứ giác BFCE là hình thang cân) nên $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow MN \parallel BC$

c) Tứ giác AXCF là hình thang cân nên

$$\angle FCY = \angle FCA - \angle YCA = \angle CAX - \angle YCA = \angle HBC - \angle YCA$$

Mà $\angle YCA = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BOC = \angle OBC$ nên

$$\angle FCY = \angle HBC - \angle OBC = \angle HBO$$

CMTT ta cũng có $\angle XCE = \angle HCO$

Mặt khác, ta lại có

$$\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ = \angle BOC$$

Nên tứ giác BHOC nội tiếp

Vì thế $\angle HCO = \angle HBO$

Từ đây, ta suy ra $\angle FCY = \angle HBO = \angle HCO = \angle XCE$

Như vậy, $XE = FY$

Từ đó $YE \parallel FX$

Bây giờ, sử dụng định lý Thales, ta có

$$\frac{MX}{MF} = \frac{AX}{FC} = \frac{AY}{BE} = \frac{NF}{NE}$$

Kết hợp với $YE \parallel FX$ ta dễ dàng suy ra ba đường thẳng MN, XY, FE đồng quy.

Bài 6:

a) Đặt $A = \{n, n+1, \dots, n+2024\}$, với n là số tự nhiên

Xét các trường hợp sau

+ TH1: n chia hết cho 3

Xét tập hợp $B = \{n+1, n+4, n+7, \dots, n+2023\}$

Tập này có 675 phần tử và thỏa mãn điều kiện

b) Ta chứng minh tập B có nhiều nhất 675 phần tử

Thật vậy, giả sử tập B có không ít hơn 676 phần tử

Ta chia tập A thành các nhóm nhỏ như sau

$$\{n, n+1, n+2\}$$

$$\{n+3, n+4, n+5\}$$

....

$$\{n+2022, n+2023, n+2024\}$$

Có tất cả 675 nhóm và hai số a_i, a_j phân biệt bất kỳ ở mỗi nhóm đều thỏa mãn $a_i + a_j$ chia hết cho $a_i - a_j$

Vì tập B có không ít hơn 676 phần tử nên tồn tại hai phần tử của tập B thuộc cùng một nhóm nhỏ, hai phần tử này sẽ không có tính chất “nodiv”, mâu thuẫn

Như vậy tập B có không quá 675 phần tử

Mặt khác, cách xây dựng tập B như ở câu a thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy tập B có nhiều nhất 675 phần tử.