

I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

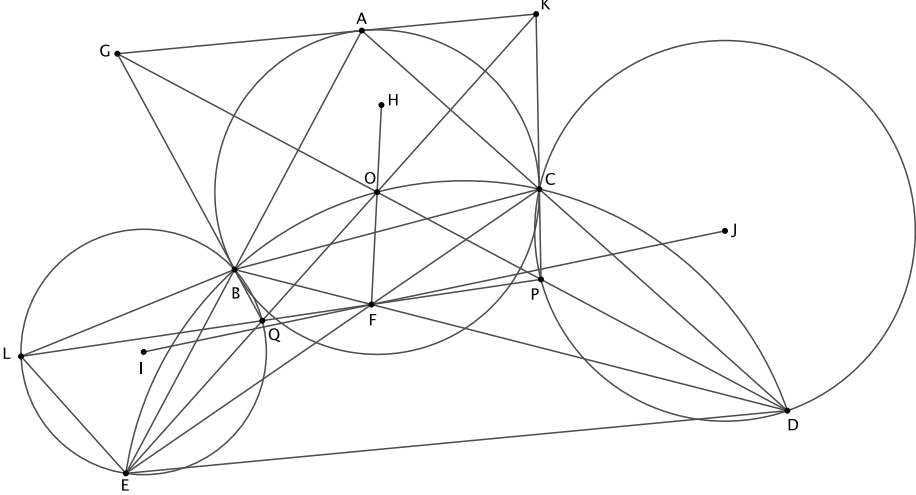
2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Nội dung	Điểm
1 (5,0 điểm)	Kí hiệu $[x, y]; (x, y)$ lần lượt là bội chung nhỏ nhất, ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương x, y. Ta chỉ ra có duy nhất một hàm $f(x, y) = [x, y]$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài. Hiển nhiên $[x, y] = [y, x]$ và $[x, x] = x$ với mọi $x, y \in \mathbb{N}^*$. Với $y > x$, ta có: $yf(x, y - x) = y[x, y - x] = \frac{xy(y - x)}{(x, y - x)}$ và $(y - x)f(x, y) = (y - x)[x, y] = \frac{(y - x)xy}{(x, y)}.$ Chú ý rằng $(x, y - x) = (x, y)$, suy ra $y[x, y - x] = (y - x)[x, y]$. Vậy hàm $f(x, y) = [x, y]$ thỏa mãn đề bài. ◦ <i>Sự duy nhất.</i> Giả sử có hai hàm $f_1(x, y)$ và $f_2(x, y)$ thỏa mãn điều kiện đề bài. Xét tập $A = \{(x, y) f_1(x, y) \neq f_2(x, y)\}$. Giả sử (s, p) thuộc A sao cho $s > p$ và $s + p$ nhỏ nhất. Ta có: $s[f_1(p, s - p) - f_2(p, s - p)] = (s - p)[f_1(p, s) - f_2(p, s)].$ Vì $f_1(p, s) \neq f_2(p, s)$, nên vế trái đẳng thức trên khác 0. Suy ra $f_1(p, s - p) \neq f_2(p, s - p).$ Điều đó có nghĩa cặp số $(p, s - p)$ thuộc tập A.	2,5

Câu	Nội dung	Điểm
	Ta có: $p + (s - p) = s < s + p$ (Mâu thuẫn với $s + p$ nhỏ nhất). Vậy $A = \emptyset$. Suy ra không tồn tại cặp số (x, y) để $f_1(x, y) \neq f_2(x, y)$. Do đó $f_1(x, y) \equiv f_2(x, y)$. Vậy $f(x, y) = [x, y]$.	2,5
2 (5,0 điểm)	Ta cần có một bổ đề. Bổ đề. Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ là các số tự nhiên tùy ý. Khi đó tồn tại số nguyên dương b sao cho $ba_1, ba_2, \dots, ba_{2023}$ đều là lũy thừa của những số tự nhiên. Đặt $a_i = p_1^{\alpha_{1i}} p_2^{\alpha_{2i}} p_3^{\alpha_{3i}} \dots p_k^{\alpha_{ki}}$ ($\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ki} \geq 0$) với $i = 1, 2, \dots, 2023$. Xét $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \dots p_k^{\beta_k}$ ($\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \geq 0$). Suy ra $ba_i = p_1^{\beta_1 + \alpha_{1i}} p_2^{\beta_2 + \alpha_{2i}} p_3^{\beta_3 + \alpha_{3i}} \dots p_k^{\beta_k + \alpha_{ki}} = c_i^{q_i}$. Đặt $c_i = p_1^{\gamma_{1i}} p_2^{\gamma_{2i}} p_3^{\gamma_{3i}} \dots p_k^{\gamma_{ki}}$ ($\gamma_{1i}, \gamma_{2i}, \dots, \gamma_{ki} \geq 0$) với $i = 1, 2, \dots, 2023$. Suy ra $c_i^{q_i} = p_1^{\gamma_{1i} q_i} p_2^{\gamma_{2i} q_i} p_3^{\gamma_{3i} q_i} \dots p_k^{\gamma_{ki} q_i}$. Do đó $\beta_1 + \alpha_{1i} = \gamma_{1i} q_i$ $\beta_2 + \alpha_{2i} = \gamma_{2i} q_i$ $\dots$ $\beta_k + \alpha_{ki} = \gamma_{ki} q_i$ hay $\beta_1 \equiv -\alpha_{1i} \pmod{q_i}$ $\beta_2 \equiv -\alpha_{2i} \pmod{q_i}$ $\dots$ $\beta_k \equiv -\alpha_{ki} \pmod{q_i}$ Chọn $q_1, q_2, \dots, q_k$ là những số nguyên dương nguyên tố cùng nhau từng cặp. Theo Định lí Trung Hoa về phần dư, hệ các đồng dư $\beta_1 \equiv -\alpha_{11} \pmod{q_1}, \beta_1 \equiv -\alpha_{12} \pmod{q_2}, \dots, \beta_1 \equiv -\alpha_{1k} \pmod{q_k}$ có nghiệm duy nhất modulo $M = q_1 q_2 \dots q_k$.	2,5
	Giả sử $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Số tập con khác rỗng của tập S là $2^n - 1$. Gọi các tập con là $S_1, S_2, \dots, S_{2^n - 1}$. Kí hiệu a_i là tổng các phần tử của tập S_i với $i = 1, 2, \dots, 2^n - 1$. Theo ý bổ đề, tồn tại số nguyên dương b sao cho $ba_1, ba_2, \dots, ba_{2^n - 1}$ là lũy thừa của những số tự nhiên. Dễ thấy tập $T = \{bx_1, bx_2, \dots, bx_n\}$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.	2,5

Câu	Nội dung	Điểm
3 (3,0 điểm)	Gọi hai nghiệm phân biệt của phương trình $P(x) = 0$ là α, β ($\alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Giả sử $P(P(x)) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt. Vì $P(P(x))$ là một đa thức bậc 4, nên $P(P(x))$ có 1 nghiệm là nghiệm kép, ta gọi nghiệm kép là γ. Ta có $P(P(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = \alpha & (1) \\ P(x) = \beta & (2) \end{cases}$ Vì $\alpha \neq \beta$, nên γ là nghiệm kép của một trong hai phương trình (1) và (2). Không mất tính tổng quát, giả sử γ là nghiệm kép của phương trình (1) và phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt là λ_1, λ_2. Ta có $P(P(P(x))) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(P(x)) = \alpha \\ P(P(x)) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = \gamma & (3) \\ P(P(x)) = \beta & (4) \end{cases}$ Ta thấy phương trình (3) có tối đa 2 nghiệm phân biệt, phương trình (4) có tối đa 4 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình $P(P(P(x))) = 0$ có tối đa 6 nghiệm phân biệt. Do đó không xảy ra trường hợp đa thức $P(P(P(x)))$ có đúng 7 nghiệm thực phân biệt.	3,0
4 (5,0 điểm)	Gọi G, K lần lượt là giao điểm của BQ, CP và tiếp tuyến tại A của (O). Ký hiệu $(BD), (CE)$ tương ứng là đường tròn đường kính BD, CE. Nếu $BD \parallel CE$, thì các $\triangle ADB, \triangle ACE$ là các tam giác đều. Suy ra $\widehat{BAC} = 60^\circ$ (mâu thuẫn với giả thiết). Do đó BD không song song với CE. Gọi F là giao điểm của BD, CE. Ta có: O, H lần lượt là trực tâm của tam giác ABC, ADE. Suy ra OH là đường Steiner của tứ giác toàn phần tạo bởi bốn đường thẳng BC, DE, BE, CD. Điều đó có nghĩa đường thẳng OH là trục đẳng phương của các đường tròn $(BD), (CE)$ (1). Ta có: $(BE, BD) = (BA, BD) = (AD, AB) = (CE, CA) = (CE, CD) \pmod{\pi}$. Suy ra B, C, D, E đồng viên. Do đó $\mathcal{P}_{F/(BD)} = \overline{FB} \cdot \overline{FD} = \overline{FC} \cdot \overline{FE} = \mathcal{P}_{F/(CE)}$. Vậy F thuộc trục đẳng phương của các đường tròn $(BD), (CE)$. Kết hợp với (1), ta có: H, O, F thẳng hàng. Áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác BEQ, CDP với $EB \cap CD = A, EQ \cap CP = K, BQ \cap DP = G$, chú ý tới G, A, K thẳng hàng, ta có: PQ, BD, CE đồng quy. Suy ra PQ đi qua điểm F. Đặt $k = \overline{FB} \cdot \overline{FD}$. Gọi L là ảnh của P qua phép nghịch đảo $I(F; k)$.	2,5

Câu	Nội dung	Điểm
	Ta có: $I(F; k) : D \rightarrow B, C \rightarrow E, P \rightarrow L, (DPC) \rightarrow (BEL)$. Ta chứng minh L thuộc (BEQ). Ta có: $(LB, LQ) = (LB, LP) = (DB, DP) \pmod{\pi}$. Dễ thấy O thuộc đường tròn $(BCDE)$. Suy ra $(DB, DP) = (EB, EQ) \pmod{\pi}$. Vậy $(LB, LQ) = (EB, EQ) \pmod{\pi}$. Do đó L thuộc (BEQ).  Điều đó có nghĩa $I(F; k) : (DPC) \rightarrow (BEQ)$. Vậy I, F, J thẳng hàng. Ta có: PQ, IJ, OH đồng quy tại F.	2,5
5 (2,0 điểm)	Số cách chọn ra 2023 phần tử $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ sao cho $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_{2023} \in A_{2023}$ là $ A_1 \cdot A_2 \cdots A_{2023} .$ Số cách chọn ra 2023 phần tử $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ sao cho $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_{2023} \in A_{2023}$ và $x_i = x_j$ là $ A_1 \cdot A_2 \cdots A_{2023} \frac{ A_i \cap A_j }{ A_i \cdot A_j }.$ Do đó số cách chọn 2023 phần tử sao cho có ít nhất hai phần tử trùng nhau là $\sum_{1 \leq i < j \leq 2023} A_1 \cdot A_2 \cdots A_{2023} \frac{ A_i \cap A_j }{ A_i \cdot A_j } = A_1 \cdot A_2 \cdots A_{2023} \sum_{1 \leq i < j \leq 2023} \frac{ A_i \cap A_j }{ A_i \cdot A_j }.$ Kết hợp với giả thiết, ta suy ra số cách chọn 2023 phần tử sao cho có ít nhất hai phần tử trùng nhau nhỏ hơn số cách chọn 2023 phần tử. Do đó tồn tại một cách chọn 2023 phần tử sao cho không có hai phần tử nào trùng nhau.	2,0