

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH LONG AN

KỲ THI HSG CẤP TỈNH LỚP 9

NĂM HỌC 2021-2022

Môn: Toán

Thời gian 150 phút

Ngày thi 17/04/2022

Bài 1. Cho biểu thức $M = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức M
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = M + x - 1$

Bài 2. a) Giải phương trình $\frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} + \frac{1}{4(3 - \sqrt{9 - x^2})} = 1$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x + y} = 1 \\ \sqrt{x + y} = x^2 - y \end{cases}$

Bài 3. Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB . Gọi C là một điểm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB , D là điểm đối xứng với A qua C , I là trung điểm của CH , J là trung điểm của DH .

- a) Chứng minh rằng $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$
b) Chứng minh rằng $\triangle CJH \sim \triangle HIB$
c) Gọi E là giao điểm của HD và BI . Chứng minh rằng $HE \cdot HD = HC^2$

Bài 4. Cho điểm M ở bên trong tam giác ABC , các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh của tam giác ABC lần lượt tại D, E, F . Tìm vị trí của điểm M trong tam giác ABC sao cho biểu thức

$P = \frac{MA}{MD} + \frac{MB}{ME} + \frac{MC}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa mãn $3(xy + yz + zx) = 4xyz$

---Hết---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. Cho biểu thức $M = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức M
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = M + x - 1$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \geq 0$

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} = (x - \sqrt{x}) - (x + \sqrt{x}) = -2\sqrt{x} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$B = M + x - 1 = x - 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2 \geq -2$$

Vậy GTNN của B bằng -2 khi $x = 1$.

Bài 2. a) Giải phương trình $\frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} + \frac{1}{4(3 - \sqrt{9 - x^2})} = 1$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x + y} = 1 \\ \sqrt{x + y} = x^2 - y \end{cases}$

Lời giải

a. ĐK: $\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$$\text{Đặt } \sqrt{9 - x^2} = a \quad (a \geq 0, a \neq 3) \Leftrightarrow x^2 = 9 - a^2$$

Theo bài ra, ta có:

$$\frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} + \frac{1}{4(3 - \sqrt{9 - x^2})} = 1 \Leftrightarrow \frac{9 - a^2}{3 + a} + \frac{1}{4(3 - a)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 - a + \frac{1}{4(3 - a)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4(3 - a)} = a - 2$$

$$\Leftrightarrow 4(a - 2)(-a - 2) = 1 \Leftrightarrow 4(-a^2 + 5a - 6) = 1$$

$$\Leftrightarrow -4a^2 + 20a - 25 = 0 \Leftrightarrow (2a - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9 - x^2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 9 - x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x^2 = 9 - \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 - \frac{25}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -\frac{11}{2}, x = \frac{11}{2}$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases}$$

ĐKXD: $x + y > 0$

Từ (1) ta có: $(x+y)^2 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} = 1$

Đặt $\begin{cases} x+y = a \\ 2xy = b \end{cases}, a > 0$

Ta có: $a^2 - b + \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow a^3 - ab + b - a = 0$

$$\Leftrightarrow a(a^2 - 1) - b(a - 1) = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(a^2 + a - b) = 0$$

TH1: $a - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

Thay vào (2) ta được: $1 = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

TH2: $a^2 + a - b = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + x + y - 2xy = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + y = 0$

Vì $x^2 + y^2 \geq 0, x + y > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + x + y > 0$

Trường hợp này không tồn tại các giá trị x, y .

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $(x, y) = (1; 0), (x, y) = (-2; 3)$.

Bài 3. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Gọi C là một điểm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH.

a) Chứng minh rằng $\widehat{CIJ} = \widehat{CBH}$

b) Chứng minh rằng $\Delta CJH \sim \Delta HIB$

c) Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh rằng $HE \cdot HD = HC^2$

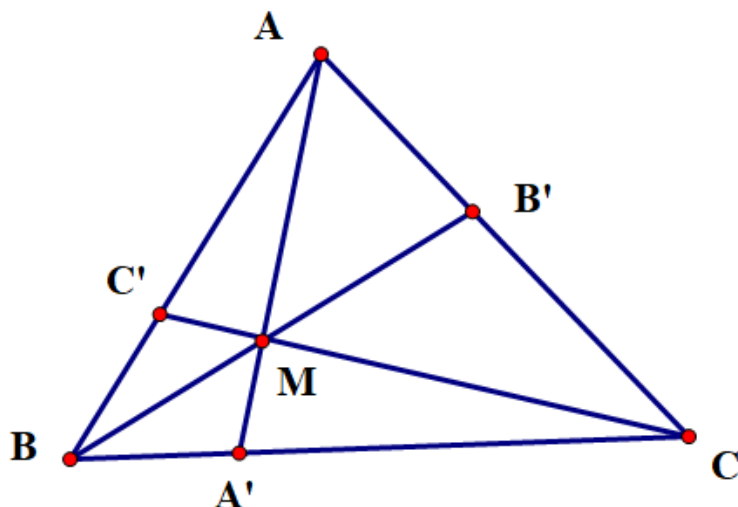
Lời giải

$$\text{Suy ra: } \frac{HE}{HC} = \frac{HC}{HD} \Rightarrow HE.HD = HC^2 (\text{đpcm}).$$

Bài 4. Cho điểm M ở bên trong tam giác ABC, các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh của tam giác ABC lần lượt tại D, E, F. Tìm vị trí của điểm M trong tam giác ABC sao cho biểu thức

$$P = \frac{MA}{MD} + \frac{MB}{ME} + \frac{MC}{MF} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Lời giải



Gọi $S_{MBC} = S_1$; $S_{AMC} = S_2$ và $S_{AMB} = S_3$ (với S_N là diện tích của hình N).

$$\text{Ta có: } \frac{MA}{MA'} = \frac{S_2}{S_{MA'C}} = \frac{S_3}{S_{MA'B}} = \frac{S_2 + S_3}{S_{MA'C} + S_{MA'B}} = \frac{S_2 + S_3}{S_1}$$

Bn làm tương tự:

$$\frac{MB}{MB'} = \frac{S_1 + S_3}{S_2}; \frac{MC}{MC'} = \frac{S_1 + S_2}{S_3}$$

Cộng các Tỉ số trên ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} + \frac{S_1 + S_3}{S_2} + \frac{S_1 + S_2}{S_3} \\ &= \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} \right) + \left(\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2} \right) + \left(\frac{S_3}{S_1} + \frac{S_1}{S_3} \right) \geq 6 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (S_1 - S_2)^2 = (S_2 - S_3)^2 = (S_3 - S_1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow M \text{ là trọng tâm tam giác ABC (Bn tự cm nha)}$$

Vậy M là trọng tâm của tam giác ABC thì S đạt giá trị nhỏ nhất (=6)

Bài 5 . Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x; y; z) thỏa mãn $3(xy + yz + zx) = 4xyz$

Lời giải

Nhận thấy $x = y = z = 0$ là nghiệm phương trình

Xét x, y, z khác 0 ta có

$$\frac{5(xy + yz + zx)}{xyz} = 4 \Leftrightarrow 5 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 4 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) : 4 \text{ ta có } |x| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} \leq 1$$

tương tự với 2 cái còn lại

$$\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|z|} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|z|} \geq \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right| \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$$

mà $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) : 4$ từ -3 đến 3 chỉ có số 0 chia hết cho 4 mà x, y, z khác 0 (loại)

vậy bộ nghiệm duy nhất của pt là $x = y = z = 0$

---Hết---

1.GV Phạm Văn Vượng Zalo 0976978545

2. Triệu Quốc Đạt
