

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1 (5 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1, \\ u_{n+2} = \frac{\sqrt{3}n}{4n-1} \sin(u_{n+1}) - \frac{1}{4} \cos(u_n), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng phương trình

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin x - \frac{1}{4} \cos x$$

có nghiệm duy nhất $x = \alpha$.

b) Chứng minh rằng $\lim u_n = \alpha$.

Lời giải.

a) **(2,0 điểm).** Xét phương trình

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin x - \frac{1}{4} \cos x \Leftrightarrow 2x = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Xét hàm số

$$g(x) = 2x - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

..... (0,5 điểm)

Ta có đạo hàm

$$g'(x) = 2 - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > 0, \forall x.$$

..... (0,5 điểm)

Do đó hàm số $g(x)$ tăng trên $\mathbb{R}$ và hơn nữa ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

..... (0,5 điểm)

Vì vậy phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \alpha$ (0,5 điểm)

Điều đó có nghĩa là tồn tại duy nhất một số $\alpha \in (-1; 1)$ thỏa mãn

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha.$$

b) **(3,0 điểm).** Ta có

$$\begin{aligned} u_{n+2} - \alpha &= \left(\frac{\sqrt{3}n}{4n-1} \sin(u_{n+1}) - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \alpha \right) - \frac{1}{4} \left(\cos(u_n) - \frac{1}{4} \cos \alpha \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}n}{4n-1} (\sin(u_{n+1}) - \sin \alpha) - \frac{1}{4} (\cos(u_n) - \cos \alpha) + \frac{\sqrt{3}}{4(4n-1)} \sin \alpha. \end{aligned}$$

..... (0,5 điểm)

Do đó, áp dụng định lý giá trị trung bình Large-range

$$\begin{aligned} |u_{n+2} - \alpha| &\leq \left| \frac{\sqrt{3}n}{4n-1} \right| |\sin(u_{n+1}) - \sin \alpha| + \frac{1}{4} |\cos(u_n) - \cos \alpha| + \left| \frac{\sqrt{3}}{4(4n-1)} \right| |\sin \alpha| \\ &\leq \frac{\sqrt{3}n}{4n-1} |u_{n+1} - \alpha| + \frac{1}{4} |u_n - \alpha| + \frac{\sqrt{3}}{4(4n-1)} \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{3} |u_{n+1} - \alpha| + \frac{1}{4} |u_n - \alpha| + \frac{\sqrt{3}}{4(4n-1)}. \end{aligned}$$

..... (0,5 điểm)

Ta có

$$\begin{aligned} |u_{n+2} - \alpha| &\leq \left| \frac{\sqrt{3}n}{4n-1} \right| |\sin(u_{n+1}) - \sin \alpha| + \frac{1}{4} |\cos(u_n) - \cos \alpha| + \left| \frac{\sqrt{3}}{4(4n-1)} \right| \\ &\leq \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

..... (0,5 điểm)

Do đó $|u_{n+2} - \alpha|$ bị chặn..... (0,5 điểm)

Để thuận tiện ta ký hiệu $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $q = \frac{1}{4}$ và $x_n = |u_n - \alpha|$. Ta được

$$x_{n+2} \leq px_{n+1} + qx_n + \frac{\sqrt{3}}{4(4n-1)},$$

và x_n bị chặn nên tồn tại $x = \limsup \{x_n\}$. Ta có

$$x \leq px + qx \Leftrightarrow x \leq (p+q)x.$$

..... (0,5 điểm)

Rõ ràng là $0 < p+q < 1$, suy ra $x = 0$. Ta kết luận $\lim x_n = 0$ hay $\lim u_n = \alpha$ (0,5 điểm)

□

Câu 2 (6 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) ; AH , AK lần lượt là đường cao của tam giác ABC và đường kính của đường tròn (O) . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại D (D khác A) và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC tại J (J khác I). Gọi M là hình chiếu vuông góc của I trên AH và L là trung điểm của HJ .

- Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng DM , IK nằm trên đường tròn (O) .
- Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng DL , JK nằm trên đường tròn (O) .
- Đường thẳng DK cắt BC tại S sao cho C nằm giữa B và S . Đường thẳng SI cắt AC , AB lần lượt tại Q , P . Chứng minh rằng $\frac{IP}{IQ} = \frac{p-b}{p-c}$, trong đó $b = AC$, $c = AB$ và p là nửa chu vi của tam giác ABC .

Lời giải.

a) (3,0 điểm).

Trước tiên ta thấy hai tam giác vuông ABK, AHC đồng dạng nên

$$AB.AC = AH.AK \quad (1) \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

Gọi E là giao điểm của AD và BC . Từ sự đồng dạng của hai tam giác ABD, AEC ta có

$$AB.AC = AE.AD \quad (2) \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

Ta có $(AEIJ) = -1$ và D là trung điểm của IJ nên

$$AI.AJ = AE.AD \quad (3) \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

Từ (1), (2), (3) ta có $AI.AJ = AK.AH$, do đó hai tam giác AHJ, AIK đồng dạng và $\widehat{AJH} = \widehat{AKI}$.

$\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$

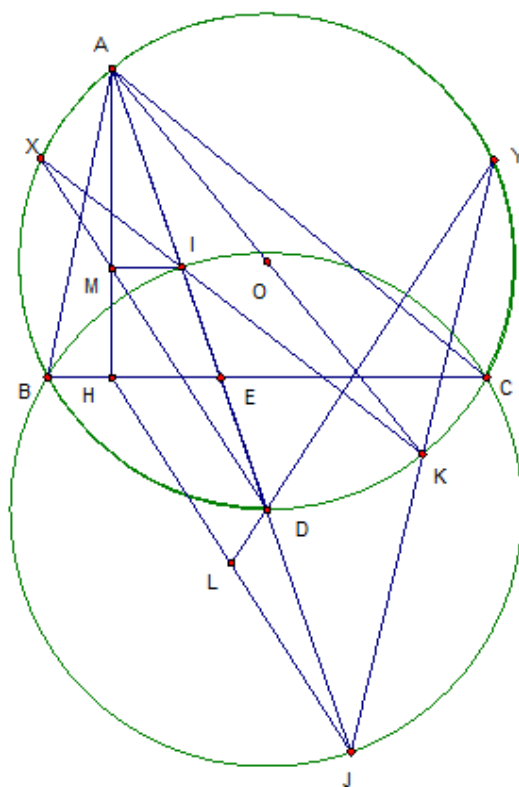
Vì $IM \parallel EH$ nên ta có

$$\frac{AH}{AM} = \frac{AE}{AI} = \frac{AE.AD}{AI.AD} = \frac{AI.AJ}{AI.AD} = \frac{AJ}{AD}.$$

Do đó $MD \parallel HJ$ và $\widehat{ADM} = \widehat{AJH} = \widehat{AKI}$

$\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$

Gọi X là giao điểm của DM, KI . Khi đó tứ giác $AKDX$ nội tiếp nên X thuộc đường tròn (AKD) hay giao điểm của hai đường thẳng DM, IK nằm trên đường tròn (O) (đpcm). $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$



b) **(1,0 điểm)**. Từ sự đồng dạng của hai tam giác AKJ, AIH ta có

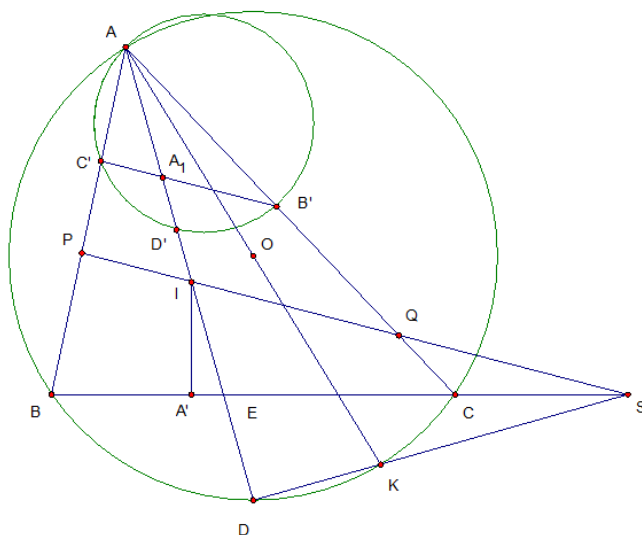
$$\widehat{AKJ} = \widehat{AIH}.$$

$\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$

Gọi Y là giao điểm thứ hai của JK với đường tròn (O) . Ta có $\widehat{YDJ} = \widehat{AKJ}$, do đó $YD \parallel IH$, mà D là trung điểm của IJ nên YD đi qua L . Từ đó ta có điều phải chứng minh.

$\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$

c) **(2,0 điểm)**.



Gọi A' là tiếp điểm của đường tròn (I) với BC , B' là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp của góc B với

cạnh AC , C' là tiếp điểm của đường tròn bằng tiếp góc $\widehat{C}$ với cạnh AB của tam giác ABC .

Ta có

$$AB' = A'C, AC' = A'B.$$

..... (0,5 điểm)

Do đường tròn đường kính SI đi qua A' và D nên $\widehat{SID} = \widehat{SA'D}$ (0,5 điểm)

Gọi D' là giao điểm khác A của đường tròn $(AB'C')$ với AD và A_1 là giao điểm của AD' , $B'C'$. Từ sự đồng dạng của các tam giác $D'C'B'$, DBC cùng với điều kiện $\frac{A_1C'}{A_1B'} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{A'B}{A'C}$ ta suy ra $\widehat{B'A_1D} = \widehat{SA'D}$ (0,5 điểm)

Do đó ta có $\widehat{SID} = \widehat{B'A_1D}$, nên $B'C' \parallel SI$. Từ đó

$$\frac{IP}{IQ} = \frac{A_1C'}{A_1B'} = \frac{A'B}{A'C} = \frac{p-b}{p-c}. \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

□

Câu 3 (4 điểm). Trường THPT chuyên Hùng Vương – Gia Lai có dự định tổ chức “Trường Đông toán học” cho các bạn học sinh chuẩn bị dự thi VMO 2020. Ban tổ chức đã gửi thư mời tham dự đến một số trường chuyên trong khu vực Miền Trung và Tây Nguyên. Biết rằng, vì điều kiện riêng của mỗi trường, có thể họ không tham gia hoặc sẽ cử không quá 10 em tham gia. Hỏi rằng số lượng học sinh tham gia Trường Đông tối đa là bao nhiêu để đảm bảo rằng luôn (không phụ thuộc vào cách đưa học sinh đến tham dự của các đoàn) có thể chia các em thành 2 lớp, mỗi lớp không quá 35 học sinh và các học sinh ở cùng một đoàn phải học chung cùng một lớp.

Lời giải.

Gọi S là số học sinh tham dự “Trường Đông toán học”. Ta nhận thấy một điều kiện cần của S là $S \leq 70$.

Ta sẽ chứng minh $S \leq 62$ bằng phản chứng. (0,5 điểm)

Giả sử $S = 63 + m$ với $0 \leq m \leq 7$ (0,5 điểm)

Với số học sinh như thế, chẳng hạn các đoàn tham dự: có m đoàn đưa đến 10 học sinh và $(7 - m)$ đoàn đưa đến 9 học sinh tham dự. (0,5 điểm)

Khi đó với cách chia thành 2 lớp bất kỳ sẽ luôn có một lớp có không ít hơn 4 đoàn tham dự và số lượng học sinh của lớp này không ít hơn 36 em.

Vậy $S \leq 62$ (0,5 điểm)

Bây giờ ta giả sử có 62 học sinh tham gia đến từ các trường trong khu vực. Ta sẽ chia thành 2 lớp học như sau.

Lần lượt đưa học sinh các đoàn tham dự vào lớp A và đến một lúc nào đó, tổng số học sinh trong lớp này, ký hiệu là $s(A)$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

i) $26 \leq s(A) \leq 35$;

ii) $s(A) + a > 35$ với mọi a là số học sinh ở các đoàn còn lại.

Các đoàn còn lại đưa vào lớp B.

..... (0,5 điểm)

Ta xét các khả năng sau:

1. Nếu $s(A) \geq 27$ thì dĩ nhiên trường hợp này thỏa mãn vì tổng số học sinh còn lại là

$$S - s(A) \leq 62 - 27 = 35. \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

2. Nếu $s(A) = 26$, thì từ điều kiện ii) trong khi đưa học sinh các đoàn lần lượt vào lớp A, ta suy ra tất

cả các đoàn trong lớp B đều có số học sinh là 10. Mà chỉ có tối đa 3 đoàn thuộc lớp B, vì nếu không thì $S \geq 26 + 4 \times 10 = 66$. Suy ra tổng số học sinh của lớp B nhiều nhất là 30.

Trường hợp này không xảy ra. (0,5 điểm)

Vậy giá trị lớn nhất của S là 62. (0,5 điểm)

□

Câu 4 (5 điểm).

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \ln(n+1)$.

b) Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Chứng minh rằng đa thức

$$P_n(x) = (x+1)^{[\ln(n+1)]} - \left(\frac{x}{1} + 1\right) \left(\frac{x}{2} + 1\right) \left(\frac{x}{3} + 1\right) \dots \left(\frac{x}{n} + 1\right)$$

không có nghiệm dương với mọi số nguyên dương n .

Lời giải.

a) **(2,0 điểm).** Ta chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng bằng phương pháp quy nạp.

Rõ ràng bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

Giả sử rằng

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \ln(n+1).$$

..... (0,5 điểm)

Ta sẽ chứng minh

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} > \ln(n+2).$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \\ &> \ln(n+1) + \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

..... (0,5 điểm)

Ta sẽ chứng minh

$$\ln(n+1) + \frac{1}{n+1} > \ln(n+2) \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} > \ln(n+2) - \ln(n+1) \Leftrightarrow 1 > \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \text{ đúng}$$

..... (0,5 điểm)

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh. (0,5 điểm)

b) **(3,0 điểm).** Với mọi $x > 0$, ta có bất đẳng thức sau đúng với mọi $k > 0$

$$(x+1)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{x}{k} + 1 \quad (1)$$

Dấu bằng xảy ra khi $k = 1$ (0,5 điểm)

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{x}{k} + 1 = \frac{1}{k} (x+k) \geq \sqrt[k]{(x+1)^k} = (x+1)^{\frac{1}{k}}.$$

..... (0,5 điểm)

Áp dụng bất đẳng thức (1), lấy tích theo k từ 1 đến n , ta có

$$(x+1)^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \leq \left(\frac{x}{1} + 1\right) \left(\frac{x}{2} + 1\right) \left(\frac{x}{3} + 1\right) \dots \left(\frac{x}{n} + 1\right) \quad (2)$$

..... (0,5 điểm)

Cho nên áp dụng câu a) với $x > 0$ thì

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x+1)^{[\ln(n+1)]} - \left(\frac{x}{1} + 1\right) \left(\frac{x}{2} + 1\right) \left(\frac{x}{3} + 1\right) \dots \left(\frac{x}{n} + 1\right) \\ &\leq (x+1)^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} - \left(\frac{x}{1} + 1\right) \left(\frac{x}{2} + 1\right) \left(\frac{x}{3} + 1\right) \dots \left(\frac{x}{n} + 1\right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

..... (0,5 điểm)

Do đó $P_n(x) \leq 0$ với mọi $x > 0$, hơn nữa trong tất cả bất đẳng dạng (1) chỉ có một trường hợp dấu bằng xảy ra là $k = 1$ (0,5 điểm)

Ta có

$$P_1(x) = -(x+1),$$

không có nghiệm dương, (0,5 điểm)

Ta có điều phải chứng minh.

□

—————Hết—————

Thí sinh không sử dụng tài liệu, máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.