

Câu 1 (4,0 điểm).

- 1) Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$ với $x \geq 0$, và $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{4}$. Rút gọn biểu thức P và tìm giá trị của x để $P = \frac{7}{3}$.

- 2) Gọi A và B là giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 2$ với parabol $(P): y = x^2$. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Câu 2 (4,0 điểm).

- 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0. \end{cases}$$

- 2) Giải phương trình $3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5$.

Câu 3 (3,0 điểm).

- 1) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $y(x-1) = x^2 + 2$.

- 2) Với mỗi số nguyên a , gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2ax - 1 = 0$. Chứng minh $(x_1^{2^n} - x_2^{2^n})(x_1^{4^n} - x_2^{4^n})$ chia hết cho 48 với mọi số tự nhiên n .

Câu 4 (6,0 điểm).

- 1) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , D là điểm bất kì thuộc cạnh BC (D khác B và C). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC . Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại P, Q sao cho M nằm giữa P và N . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt AB tại I (khác B). Các đường thẳng DI và AC cắt nhau tại K .

- a) Chứng minh $\widehat{PID} = \widehat{PAC}$. Từ đó suy ra 4 điểm A, I, P, K cùng thuộc một đường tròn.

- b) Chứng minh $\triangle PBD$ đồng dạng với $\triangle PAK$ và $\frac{QA}{QB} = \frac{PD}{PK}$.

- c) Đường thẳng CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G (khác P). Đường thẳng IG cắt đường thẳng BC tại E . Chứng minh khi D di chuyển trên đoạn BC thì tỉ số $\frac{CD}{CE}$ không đổi.

- 2) Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Chứng minh $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

Câu 5 (3,0 điểm).

- 1) Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $1 \leq a \leq 3; 1 \leq b \leq 3; 1 \leq c \leq 3$ và $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = a^2 + b^2 + c^2$.

- 2) Cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_{2024}$. Tại mỗi đỉnh A_k ($k = 1, 2, \dots, 2024$), người ta ghi một số thực a_k sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu hai số trên hai đỉnh kề nhau bằng một số nguyên dương không lớn hơn 3. Tìm giá trị lớn nhất có thể được của giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số ghi trên mỗi cặp đỉnh của đa giác đã cho, biết rằng các số ghi tại các đỉnh đã cho đôi một khác nhau.