

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{7\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $x = 9 - 4\sqrt{5}$.

c) Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{2}$.

Bài 2. 1) Cho đường thẳng (d): $mx + (2m - 3)y = 6$ (m là tham số).

a) Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m.

b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ điểm $A(2; -3)$ đến đường thẳng (d) lớn nhất.

2) Lúc 10 giờ, anh Hòa đi xe máy từ A đến B, đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường thì xe bị hỏng nên phải dừng lại 50 phút để sửa xe rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu là 10 km/h và đến B lúc 13 giờ 20 phút cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy đi trên $\frac{2}{3}$ quãng đường đầu không đổi và vận tốc $\frac{1}{3}$ quãng đường sau cũng không đổi. Hỏi anh Hòa bị hỏng xe lúc mấy giờ? Biết quãng đường AB dài 90 km.

Bài 3. a) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (H thuộc BC). Biết diện tích hai tam giác ABH và ACH lần lượt là 9 cm^2 và 36 cm^2 . Tính độ dài đường cao AH.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 64x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 16x^2y + 12x = y^2 \end{cases}$$

c) Giải phương trình $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}=\frac{2x-11}{5}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O; R), trên cung $\widehat{BC}$ không chứa điểm A lấy điểm D bất kỳ (D khác B, C). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC), kẻ BE vuông góc với AD (E thuộc AD). Gọi K là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABHE nội tiếp và HE song song với DC.

b) Chứng minh rằng $DB + DC = DA$.

c) Tìm vị trí của điểm D để biểu thức $\frac{15}{DA} + \frac{3}{DK} + 2024\left(\frac{1}{DB} + \frac{1}{DC}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5. a) Tìm các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa mãn $\frac{x - y\sqrt{2009}}{y - z\sqrt{2009}}$ là số hữu tỉ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

b) Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $ab + bc + cd + da = 1$.

Chứng minh rằng $\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{d+a+b} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$.