

ĐỀ CHUYÊN TOÁN QUẢNG NAM NĂM 2021-2022

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{8+x\left(1+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}\right)}{(x-4)(x-2\sqrt{x}+4)} + \frac{x-3\sqrt{x}}{2(x-\sqrt{x}-6)}$ (với $x > 1, x \neq 4, x \neq 9$)

b) Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $pq = r + 1$ và $2(p^2 + q^2) = r^2 + 1$.

Câu 2: (1,0 điểm) Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) $y = (2 - 2m)x + m$ (m là tham số). Chứng

minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB,

hai điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Tính độ dài đoạn thẳng KH.

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $(x-1)\sqrt{7-2x} = x^2 - 3x + 2$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y - xy - 2 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Câu 4: (2,0 điểm).

Cho hình vuông ABCD tâm O, điểm E nằm trên đoạn thẳng OB (E khác O, B), H là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AE. Gọi F là giao điểm của AC và DH.

a) Chứng minh HD là tia phân giác của góc AHC.

b) Chứng minh diện tích hình vuông ABCD bằng hai lần diện tích tứ giác AEFD.

Câu 5: (2,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E. Gọi H là giao điểm của BE và CF, đường thẳng AH cắt BC tại D.

a) Chứng minh tứ giác ODFE nội tiếp đường tròn.

b) Gọi K là giao điểm của AH và EF, I là trung điểm của AH. Đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại M (M khác C). Chứng minh CI vuông góc với KM.

Câu 6: (1,0 điểm). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $H = \frac{x^2}{9z + zx^2} + \frac{y^2}{9x + xy^2} + \frac{z^2}{9y + yz^2}$.

-----☆☺☆-----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{8+x(1+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1})}{(x-4)(x-2\sqrt{x}+4)} + \frac{x-3\sqrt{x}}{2(x-\sqrt{x}-6)}$ (với $x > 1, x \neq 4, x \neq 9$)

b) Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $pq = r + 1$ và $2(p^2 + q^2) = r^2 + 1$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{8+x(1+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1})}{(x-4)(x-2\sqrt{x}+4)} + \frac{x-3\sqrt{x}}{2(x-\sqrt{x}-6)}$ (với $x > 1, x \neq 4, x \neq 9$)

Với $x > 1, x \neq 4, x \neq 9$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{8+x(1+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1})}{(x-4)(x-2\sqrt{x}+4)} + \frac{x-3\sqrt{x}}{2(x-\sqrt{x}-6)} \\ &= \frac{8+x\left(1+\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}\right)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{8+x(1+|\sqrt{x}-1|)}{(\sqrt{x}-2)(x\sqrt{x}+8)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{8+x\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(x\sqrt{x}+8)} + \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x}-2)} + \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}+2)+\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+4}{2(x-4)} \end{aligned}$$

b) Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $pq = r + 1$ và $2(p^2 + q^2) = r^2 + 1$.

Đặt $\begin{cases} S = p + q \\ P = p \cdot q \end{cases}$ ta có hệ:

$$\begin{cases} P = r + 1 \\ 2(S^2 - 2P) = r^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = r + 1 \\ 2(S^2 - 2P) = r^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = r + 1 \\ S^2 = \frac{r^2 + 4r + 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = r + 1 \\ S = \sqrt{\frac{r^2 + 4r + 5}{2}} \end{cases}$$

Vì p, q, r là ba số nguyên tố nên ta có:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} r=5 \\ S=5 \\ P=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=5 \\ p+q=5 \\ p \cdot q=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=5 \\ q=5-p \\ p \cdot (5-p)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=5 \\ q=5-p \\ p^2-5p+6=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r=5 \\ p=2 \text{ hoặc } p=3 \\ q=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 2: (1,0 điểm) Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) $y = (2 - 2m)x + m$ (m là tham số). Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB, hai điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Tính độ dài đoạn thẳng HK.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$\begin{aligned} &x^2 = (2 - 2m)x + m \\ &\Leftrightarrow x^2 - (2 - 2m)x - m = 0 \quad (1) \\ &\Delta = (2 - 2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) = 4m^2 - 4m + 4 = (2m + 1)^2 + 3 > 0 \quad \forall m \end{aligned}$$

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của m .

Với mọi m , theo định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2 - 2m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -m \end{cases}$$

Vì $M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB nên $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 - 2m}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

$$\text{Thay } m = \frac{1}{2} \text{ vào (1) ta có phương trình: } x^2 - x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{Vì H, K là hình chiếu của A, B lên trục hoành nên } \Rightarrow H\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}; 0\right), K\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\Rightarrow HK = \left| \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3}$$

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $(x-1)\sqrt{7-2x} = x^2 - 3x + 2$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y - xy - 2 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải

a) Giải phương trình $(x-1)\sqrt{7-2x} = x^2 - 3x + 2$. Điều kiện: $x \leq \frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{7-2x} = (x-1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{7-2x} - (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{7-2x} - x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{7-2x} = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ 7-2x = (x-2)^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ -x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ x=3 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{1; 3\}$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y - xy - 2 = 0 & (1) \\ x^2 - y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta có: $x + 2y - xy - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x(1-y) - 2(1-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1-y) - 2(1-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Với $x=2$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$4 - y^2 + 8y + 4y^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 + 8y + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=\frac{-5}{3} \end{cases}$$

Với $y=1$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$x^2 - 1 + 2x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{-2}{3} \end{cases}$$

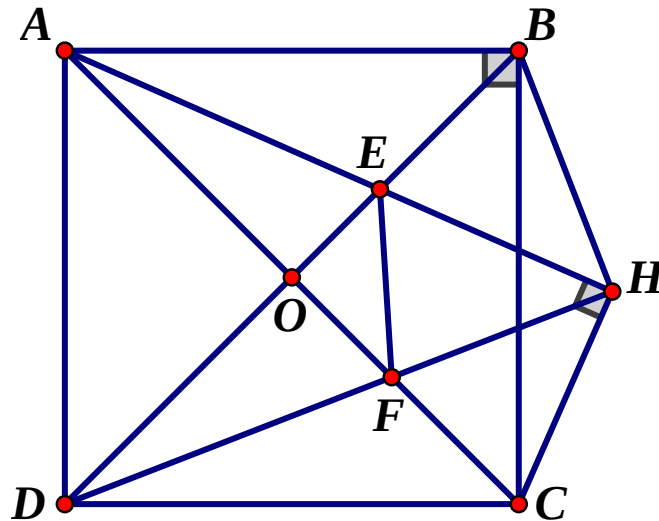
Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) \in \left\{ (2; -1); \left(2; \frac{-5}{3}\right); (0; 1); \left(\frac{-2}{3}; 1\right) \right\}$

Câu 4: (2,0 điểm).

Cho hình vuông ABCD tâm O, điểm E nằm trên đoạn thẳng OB (E khác O, B), H là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AE. Gọi F là giao điểm của AC và DH.

- Chứng minh HD là tia phân giác của góc AHC.
- Chứng minh diện tích hình vuông ABCD bằng hai lần diện tích tứ giác AEFD.

Lời giải



- Ta có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (ABCD là hình vuông)

$$\widehat{AHC} = 90^\circ \text{ (H là hình chiếu của C trên AE)}$$

Xét tứ giác ADCH có: $\widehat{ADC} + \widehat{AHC} = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác ADCH nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DHC} = 45^\circ \text{ (cùng chắn cung CD) mà } \widehat{AHD} + \widehat{DHC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHD} = 45^\circ$$

$\Rightarrow$ HD là tia phân giác của góc AHC.

- Xét tứ giác OEHC có: $\widehat{EOC} + \widehat{EHC} = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác OEHC nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{ACH} \text{ (góc ngoài bằng góc đối trong)} \quad (1)$$

$$\text{Tứ giác ADCH nội tiếp (cmt)} \Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{ACH} \text{ (cùng chắn cung AH)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ADF}$$

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle FAD$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \widehat{FAD} (= 45^\circ) \\ \widehat{AED} = \widehat{ADF} \text{ (cmt)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle FAD (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{DE} \Leftrightarrow AF \cdot DE = AD^2$$

Ta có: $S_{AEFD} = \frac{1}{2} AF \cdot DE = \frac{1}{2} AD^2 = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

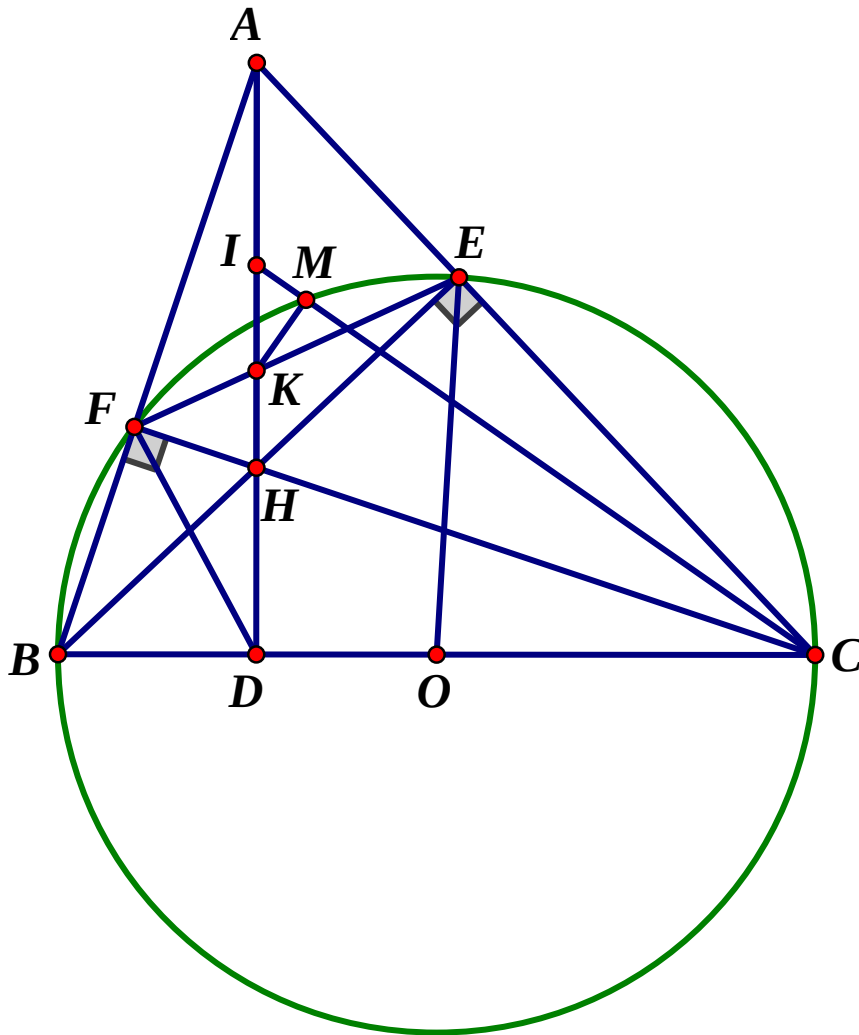
Câu 5: (2,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E.

Gọi H là giao điểm của BE và CF, đường thẳng AH cắt BC tại D.

- Chứng minh tứ giác ODFE nội tiếp đường tròn.
- Gọi K là giao điểm của AH và EF, I là trung điểm của AH. Đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại M (M khác C). Chứng minh CI vuông góc với KM.

Lời giải



- Ta có $\widehat{BFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\widehat{BEC} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

Xét tam giác ABC có: BE và CF là 2 đường cao cắt nhau tại H $\Rightarrow$ H là trực tâm tam giác ABC.

$\Rightarrow AH \perp BC$ tại D.

Ta có tứ giác BCEF nội tiếp (O) $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{OCE}$ (góc ngoài bằng góc đối trong).

Xét tứ giác ACDF có:

$$\widehat{ADC} = 90^\circ \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{AFC} = 90^\circ \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow$ tứ giác ACDF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{OCE}$ (góc ngoài bằng góc đối trong).

Xét tam giác BEC vuông tại E có EO là trung tuyến

$$\Rightarrow EO = \frac{1}{2}BC = CO = BO \text{ (định lý đường trung tuyến của tam giác vuông)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OCE} = \widehat{OEC} \Rightarrow \widehat{COE} = 180^\circ - 2\widehat{OCE}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{AFE} = \widehat{OCE} \text{ (cmt)} \\ \widehat{BFD} = \widehat{OCE} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{COE} = 180^\circ - \widehat{AFE} - \widehat{BFD} = \widehat{EFD}$$

Xét tứ giác ODFE có $\widehat{COE} = \widehat{EFD}$ (cmt)

Mà hai góc ở vị trí góc ngoài và góc đối trong $\Rightarrow$ tứ giác ODFE nội tiếp.

b) Xét tam giác AEH vuông tại E có EI là trung tuyến

$$\Rightarrow EI = \frac{1}{2}AH = AI = HI \text{ (định lý đường trung tuyến của tam giác vuông)}$$

$$\Rightarrow \widehat{IAE} = \widehat{IEA}, \text{ có } \widehat{OCE} = \widehat{OEC} \text{ (cmt)} \text{ và } \widehat{IAE} \text{ phụ } \widehat{OCE} \Rightarrow \widehat{IEA} \text{ phụ } \widehat{OEC} \Rightarrow \widehat{OEI} = 90^\circ$$

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{OFI} = 90^\circ$

Xét tứ giác OEIF có $\widehat{OEI} + \widehat{OFI} = 180^\circ$

Mà hai góc ở vị trí đối nhau $\Rightarrow$ tứ giác OEIF nội tiếp.

Ta có tứ giác ODFE nội tiếp (cmt), tứ giác OEIF nội tiếp (cmt) $\Rightarrow$ 5 điểm O, D, F, I, E cùng thuộc đường tròn đường kính ID.

Xét $\triangle IEK$ và $\triangle IDE$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DIE} \text{ chung} \\ \widehat{IDK} = \widehat{IDE} (= \widehat{ECF}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle IEK \sim \triangle IDE \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{IE}{ID} = \frac{IK}{IE} \Leftrightarrow IE^2 = ID \cdot IK \quad (1)$$

Xét $\triangle IEM$ và $\triangle ICE$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ICE} \text{ chung} \\ \widehat{IEM} = \widehat{ICE} \left(= \frac{1}{2} \text{ số cung } EM \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle IEM \sim \triangle ICE \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{IE}{IC} = \frac{IM}{IE} \Leftrightarrow IE^2 = IC \cdot IM \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow IK \cdot ID = IC \cdot IM \Rightarrow \frac{IK}{IM} = \frac{IC}{ID}$$

Xét $\triangle IMK$ và $\triangle IDC$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DIC} \text{ chung} \\ \frac{IK}{IM} = \frac{IC}{ID} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle IMK \sim \triangle IDC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{IDC} \text{ mà}$$

$$\widehat{IDC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IMK} = 90^\circ \Rightarrow CI \perp KM$$

Câu 6: (1,0 điểm). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } H = \frac{x^2}{9z + zx^2} + \frac{y^2}{9x + xy^2} + \frac{z^2}{9y + yz^2}.$$

Lời giải

Theo đề ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

Đặt $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c \ (a, b, c > 0) \Rightarrow a + b + c = 1$

Khi đó $H = \frac{c}{9a^2 + 1} + \frac{a}{9b^2 + 1} + \frac{b}{9c^2 + 1}$

Ta có: $\frac{c}{9a^2 + 1} \leq \frac{c(9a^2 + 1) - 9a^2c}{9a^2 + 1} = c - \frac{9a^2c}{9a^2 + 1}$

Vì $9a^2 + 1 \geq 6a \Rightarrow c - \frac{9a^2c}{9a^2 + 1} \geq c - \frac{9a^2c}{6a} = c - \frac{3}{2}ac$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{a}{9b^2 + 1} \geq a - \frac{3}{2}ba; \frac{b}{9c^2 + 1} \geq b - \frac{3}{2}cb$

$\Rightarrow H \geq a + b + c - \frac{3}{2}(ab + bc + ca)$

Mà $ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3}$

$\Rightarrow H \geq 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

Vậy $H_{\min} = \frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 3$

-----☆☺☆-----