

Câu 1. (4,0 điểm) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = \frac{1}{2}, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}}), \forall n \geq 2$.

a) Chứng minh rằng $x_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}^2} - \frac{1}{x_n}$, $\forall n \geq 2$ và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$.

Câu 2. (4,0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x - 3f(y)) = xf(y) - yf(x) - 2f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. (5,0 điểm)

a) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B và C là tiếp điểm). Lấy điểm E thuộc cung lớn BC, đường tròn (ABE) cắt AC tại điểm D khác A. Chứng minh rằng $EB + ED \geq 2.EC$.

b) Cho tam giác ABC có D là tâm đường tròn nội tiếp. Một đường thẳng qua D vuông góc với AD cắt AC tại E và AB tại F. Các đường thẳng qua E song song DC và qua F song song DB cắt nhau tại I, các đường thẳng qua E vuông góc DC và qua F vuông góc DB cắt nhau tại H. Gọi G là giao điểm thứ hai của AD và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh I, E, H, F thuộc một đường tròn có tâm nằm trên AG và GH vuông góc với ID.

Câu 4. (4,0 điểm) Cho số nguyên $n \geq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của số nguyên dương m theo n sao cho tồn tại m tập hợp $A_1; A_2; \dots; A_m$ là tập con của tập $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ thỏa mãn A_1 có 1 phần tử, A_2 có 2 phần tử, ..., A_m có m phần tử và trong m tập hợp đó không có tập hợp nào là tập con của một tập hợp khác.

Câu 5. (3,0 điểm) Kí hiệu $\text{lcm}(x; y)$ là bội chung nhỏ nhất của x và y . Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(a; b; c)$ sao cho tồn tại số nguyên dương n để:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = n.\text{lcm}(a; b) + n^2 \\ b^2 + c^2 = n.\text{lcm}(b; c) + n^2 \\ c^2 + a^2 = n.\text{lcm}(c; a) + n^2 \end{cases}$$

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi số 1: Cán bộ coi thi số 2:

Hướng dẫn chấm:

Câu 1. (4,0 điểm) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = \frac{1}{2}, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}}), \forall n \geq 2$.

a) Chứng minh rằng $x_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}^2} - \frac{1}{x_n}$, $\forall n \geq 2$ và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$.

Giải: a) (2 điểm) Có: $x_n > \frac{1}{2}(x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2}) = x_{n-1} \Rightarrow (x_n)$ là dãy tăng.

Giả sử (x_n) bị chặn trên, mà dãy tăng $\Rightarrow$ tồn tại $\lim x_n = L$.

Khi đó: $L = \frac{1}{2}(L + \sqrt{L^2 + 4L}) \Rightarrow L = 0$ (Vô lí) do $x_1 > 0$ và dãy tăng.

c) $\Rightarrow (x_n)$ không bị chặn trên $\Rightarrow x_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

b) Có: $2x_n - x_{n-1} = \sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} \Rightarrow (2x_n - x_{n-1})^2 = x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}$

$\Leftrightarrow 4x_n^2 - 4x_n x_{n-1} = 4x_{n-1} \Rightarrow x_n^2 - x_n x_{n-1} - x_{n-1} = 0 \Rightarrow x_{n-1} = x_n(x_n - x_{n-1})$

Chia 2 vế cho $x_n^2 \cdot x_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}^2} - \frac{1}{x_n}$ (1 điểm)

Đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{x_1^2} + \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{x_{i-1}^2} - \frac{1}{x_i} \right) = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} = 6 - \frac{1}{x_n} \rightarrow 6$. (1 điểm)

Câu 2: (4,0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x - 3f(y)) = xf(y) - yf(x) - 2f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Thay $x = 0 \Rightarrow f(-3f(y)) = -yf(0) - 2f(0)$ (1)

TH1: $f(0) = 0$. Thay $y = 0 \Rightarrow f(x) = -2f(x) \Rightarrow f(x) = 0 \forall x$ (1 điểm)

TH2: $f(0) \neq 0$ từ (1) $\Rightarrow f$ là toàn ánh. (1 điểm)

$\Rightarrow$ Tồn tại c sao cho $f(c) = 0$. Thay $y = c \Rightarrow f(x) = -cf(x) - 2f(x)$

Nếu c khác $-3 \Rightarrow f(x) = 0$ với mọi x (mâu thuẫn với $f(0) \neq 0$)

Do đó $c = -3 \Rightarrow f(-3) = 0$

Thay $x = -3 \Rightarrow f(-3 - 3f(y)) = -3f(y) \Rightarrow f(-3 + t) = t$ với mọi t có dạng $t = -3f(y)$

Mà f là toàn ánh nên $-3f(y)$ quét mọi giá trị trên $\mathbb{R}$. Do vậy $-3 + t$ chạy khắp $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x) = x + 3, \forall x \in R. \text{ (1, 5 điểm)}$

Thử lại thấy đúng. **(0,5 điểm)**

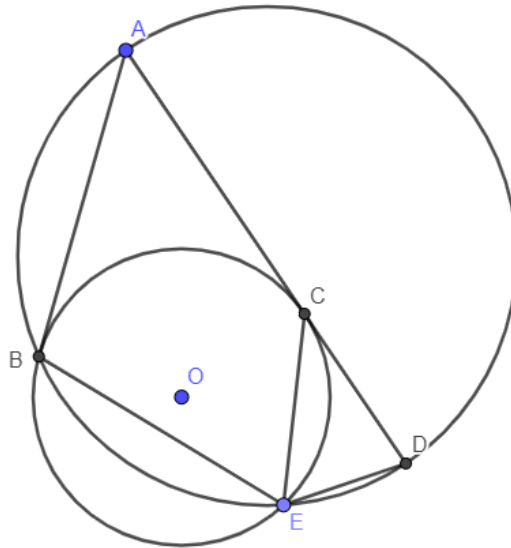
Câu 3. (5,0 điểm)

- a) **(2,0 điểm)** Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B và C là tiếp điểm). Lấy điểm E thuộc cung lớn BC, đường tròn (ABE) cắt AC tại điểm D khác A. Chứng minh rằng $EB + ED \geq 2.EC$.

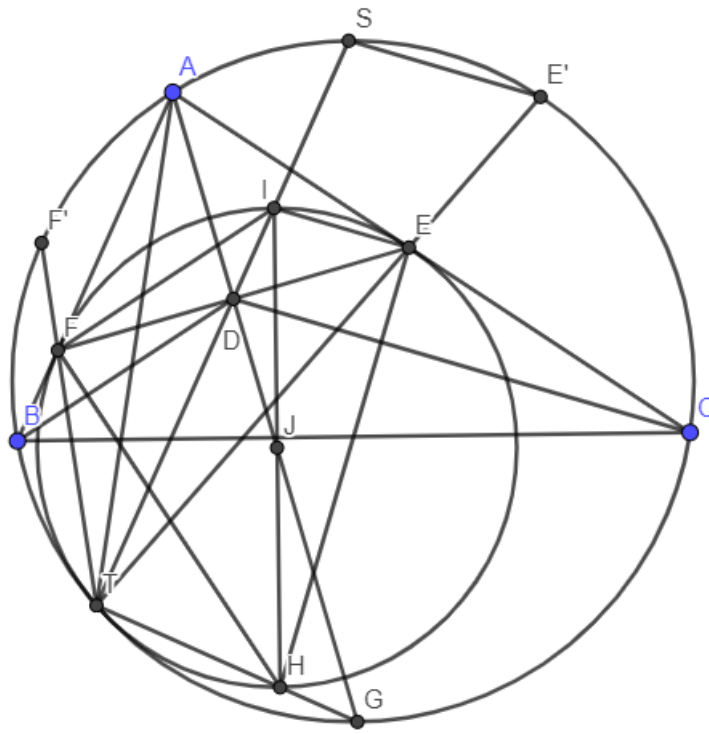
Giải: a) Ta có $CBE = ECD$ và

$$CDE = 180^\circ - ABE = 180^\circ - ABC - CBE = 180^\circ - BEC - CBE = BCE \text{ nên hai tam giác EBC và}$$

$$ECD \text{ đồng dạng, do đó } \frac{EB}{EC} = \frac{EC}{ED} \Rightarrow EB.ED = EC^2 \Rightarrow EB + ED \geq 2\sqrt{EB.ED} = 2.EC \text{ (2,0 điểm)}$$



- b) **(3,0 điểm)** Cho tam giác ABC có D là tâm đường tròn nội tiếp. Một đường thẳng qua D vuông góc với AD cắt AC tại E và AB tại F. Các đường thẳng qua E song song DC và qua F song song DB cắt nhau tại I, các đường thẳng qua E vuông góc DC và qua F vuông góc DB cắt nhau tại H. Gọi G là giao điểm thứ hai của AD và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh I, E, H, F thuộc một đường tròn có tâm nằm trên AG và GH vuông góc với ID.



+) Có: $\angle IEH = \angle IFH = 90^\circ \Rightarrow I, F, H, E$ thuộc đường tròn đường kính IH. Gọi J là trung điểm IH $\Rightarrow J$ là tâm của đường tròn (IFHE).

$\Rightarrow JE = JF \Rightarrow J$ thuộc đường trung trực EF.

Mà AD là phân giác góc A, EF vuông góc nên AD là đường trung trực EF

$\Rightarrow A, D, J$ thẳng hàng. **(1.0 điểm)**

$$\text{Có: } \angle EJF = 2\angle EHF = 2.(180^\circ - \angle EIF) = 2(180^\circ - \angle BDC) = 2.(180^\circ - 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2})$$

$$= 180^\circ - \angle BAC \Rightarrow \angle EJF + \angle BAC = 180^\circ \Rightarrow \angle AEJ = \angle AFJ = 90^\circ$$

Khi đó, (IEHF) là đường tròn A-mixtiliner nên tiếp xúc (ABC) tại một điểm T **(0.5 điểm)**

+) Do tính chất của đường tròn A-mixtilinear nên nếu gọi TE cắt (ABC) tại E' và TF cắt (ABC) tại F' thì E', F' lần lượt là điểm chính giữa cung AC, AB.

+) Gọi TI cắt đường tròn (ABC) tại S thì S là điểm chính giữa cung BC chứa A.

$$\text{Thật vậy: Vì } SE' \parallel IE \text{ nên } SE' \parallel CF' \Rightarrow s\widehat{SF'} = s\widehat{CE'} = s\widehat{AE'} \Rightarrow s\widehat{SE'} = s\widehat{AF'} = \frac{1}{2}s\widehat{AB}$$

$$\text{Do đó: } s\widehat{CS} = \frac{1}{2}s\widehat{CB} \Rightarrow S \text{ là điểm chính giữa cung BC chứa A. } \mathbf{(0,5 \text{ điểm})}$$

+) T, D, I thẳng hàng. Thật vậy: Vì $s\widehat{SE'} = s\widehat{AF'} \Rightarrow \angle ATF' = \angle STE'$ (*)

Xét đường tròn (TEF) có tiếp tuyến tại E và F cắt nhau tại A nên TA là đường đối trung của tam giác TEF. Kết hợp với (*) $\Rightarrow$ TI là trung tuyến của tam giác TEF $\Rightarrow$ TI đi qua trung điểm D của EF. **(0, 5 điểm)**

+ Phép vị tự tâm T biến (IEF) thành đường tròn (ABC), biến I thành S nên biến đường kính IH thành đường kính SG $\Rightarrow$ biến H thành G. Do đó: T, H, G thẳng hàng.

Vậy DI vuông góc HG do ST vuông góc GT. **(0,5 điểm)**

Câu 4. (4,0 điểm) Cho số nguyên $n \geq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của số nguyên dương m sao cho tồn tại m tập hợp $A_1; A_2; \dots; A_m$ là tập con của tập $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ thỏa mãn A_1 có 1 phần tử, A_2 có 2 phần tử, ..., A_m có m phần tử và trong m tập hợp đó không có tập hợp nào là tập con của một tập hợp khác.

+) Ta chứng minh không thể chọn ra $n - 1$ tập như vậy.

Giả sử chọn được $n - 1$ tập con của $\{1; 2; \dots; n\}$

Giả sử $A_1 = \{a\} \Rightarrow A_{n-1} = \{1; 2; \dots; n\} \setminus \{a\}$

$\Rightarrow$ Với mọi cách chọn tập A_2 có 2 phần tử, không chứa a thì $A_2 \subset A_{n-1}$

$\Rightarrow$ Vô lí. **(1, 0 điểm)**

Ta chứng minh giá trị lớn nhất của m là $n - 2$.

+) Ta chứng minh có thể chọn ra $n - 2$ tập hợp như vậy bằng quy nạp theo n .

. Với $n = 4$, chọn 2 tập $A_1 = \{1\}; A_2 = \{2; 3\}$

. Với $n = 5$, chọn 3 tập: $A_1 = \{1\}; A_2 = \{2; 3\}, A_3 = \{2; 4; 5\}$

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k + 2$.

Giả sử tập $\{1; 2; \dots; k\}$ có $k - 2$ tập con thỏa mãn là: $A_1; A_2; A_3; \dots; A_{k-2}$

Ta chỉ ra cách xây dựng k tập con $B_1; B_2; \dots; B_k$ của $\{1; 2; \dots; k+2\}$ như sau:

$B_1 = \{k+2\}; B_{i+1} = A_i \cup \{k+1\} \forall i = 1; 2; \dots; k-2$ và $B_k = \{1; 2; 3; \dots; k\}$.

Khi đó dễ thấy các tập B_i đều có i phần tử và không có tập nào là con của tập khác.

Theo quy nạp, ta chứng minh được có thể chọn ra $n - 2$ tập như vậy với mọi $n \geq 4$

Vậy giá trị lớn nhất là $n - 2$. **(3.0 điểm)**

Câu 5: (3,0 điểm) Kí hiệu: $\text{lcm}(x; y) = \text{BCNN}(x; y)$. Tìm tất cả các bộ $(a; b; c)$ với $a; b; c$ là các số nguyên dương thỏa mãn tồn tại số nguyên dương n để:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = n.lcm(a;b) + n^2 \\ b^2 + c^2 = n.lcm(b;c) + n^2 \\ c^2 + a^2 = n.lcm(c;a) + n^2 \end{cases}$$

Ta sẽ CM: $a = b = c$.

Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $a; b; c$ cùng chia hết cho p

Từ phương trình $\Rightarrow n^2$ chia hết cho $p \Rightarrow n$ chia hết cho p

$\Rightarrow (\frac{a}{p}; \frac{b}{p}; \frac{c}{p}; \frac{n}{p})$ cũng là nghiệm của hệ phương trình trên

$\Rightarrow$ Ta có thể giả sử $(a; b; c) = 1 \Rightarrow (a; b; c; n) = 1$ **(1, 0 điểm)**

Dùng (1) + (3) – (2) ta được: $2a^2 = n^2 + n(lcm(a;b) + lcm(c;a) - lcm(b;c))$

$\Rightarrow 2a^2$ chia hết cho n

Nếu $n > 2 \Rightarrow$ Tồn tại ước nguyên tố p của n sao cho a^2 chia hết cho $p \Rightarrow a$ chia hết cho p . CMTT $\Rightarrow b$ và c cũng chia hết cho p , mâu thuẫn với $(a;b;c;n) = 1$. **(0, 5 điểm)**

Nếu $n = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = lcm(a;b) + 1 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 = lcm(a;b) + 1 \leq ab + 1$

$\Rightarrow a = b = 1$. Tương tự: $c = 1 \Rightarrow$ Kết hợp với việc giả sử $(a;b;c) = 1$ ở trên, ta được nghiệm tổng quát $(a; b; c) = (a; a; a)$. **(0, 5 điểm)**

Nếu $n = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2lcm(a;b) + 4 \leq 2ab + 4 \Rightarrow (a-b)^2 \leq 4 \Rightarrow |a-b| \leq 2$

CMTT: $|b-c| \leq 2; |c-a| \leq 2$

Nếu có 2 số liên tiếp, giả sử là $|a-b| = 1, a = b + 1$. Thay vào:

$\Rightarrow (b+1)^2 + b^2 = 2b(b+1) + 4 \Rightarrow$ vô lí

Như vậy, $|a-b|, |b-c|, |c-a|$ phải bằng 0 hoặc 2

$\Rightarrow$ Có 2 số bằng nhau, giả sử là $a = b \Rightarrow 2a^2 = 2a + 4 \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow 4 + c^2 = 2lcm(2;c) + 4 \Rightarrow c$ chẵn $\Rightarrow$ mâu thuẫn với $(a;b;c) = 1$

$\Rightarrow$ Với $n = 2$ thì hệ không có nghiệm. **(1, 0 điểm)**

Vậy $a = b = c$.