| SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO<br>HẢI PHÒNG<br><br>**ĐỀ THI CHÍNH THỨC** | **KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN**<br>**Năm học 2022-2023**<br>**ĐỀ THI MÔN : TOÁN CHUYÊN**<br>*Thời gian làm bài : 150 phút* |
|---|---|

**Bài 1. (2 điểm)**

1) Cho biểu thức $A=\dfrac{x+4}{\sqrt{x}}+\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x-2\sqrt{x}}+\dfrac{x^2-2x\sqrt{x}+8\sqrt{x}-16}{4\sqrt{x}-x\sqrt{x}}\left(\begin{matrix}x>0\\x\neq 4\end{matrix}\right)$

Rút gọn biểu thức $A$ và chứng minh $A>8$

2) Cho phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$có hai nghiệm $x_1,x_2$ thỏa mãn $0\le x_1,x_2\le 1$.

Chứng minh $\dfrac{3}{4}\le\dfrac{\left(a-b\right)\left(2a-c\right)}{a\left(a-b+c\right)}\le 2$

**Bài 2. (2 điểm)**

1) Giải phương trình $x^2-10x+14=2\sqrt{2x+1}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+4y^2-4y=33\\x^2+2y^2-3xy+4x-5y+3=0\end{cases}$

**Bài 3. (3 điểm)** Cho tam giác cân $ABC\left(AB=AC>BC\right)$nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Các đường phân giác trong $BD,CE$ của tam giác cắt nhau tại $I$, $BI$ cắt đường tròn $\left(O\right)$tại $F\left(F\neq B\right)$. Điểm $H$ đối xứng với C qua $D$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $HBC$ cắt $BI$ tại K $\left(K\neq B\right)$

a) Chứng minh $DC^2=DI.DB$ và $D$ là trung điểm của đoạn thẳng $IK$

b) Kẻ $KM$ song song với $AC\left(M\in AC\right)$. Chứng minh M là điểm đối xứng với $I$ qua AC

c) Gọi $N$ là giao điểm của $FC$ và $AI$; gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $IBE$. Chứng minh bốn điểm $M,N,J,D$ cùng thuộc một đường tròn

**Bài 4. (1 điểm)**

Xét $x,y,z$ là các số thực dương thỏa mãn $3x^2\le 2\left(y^2+4yz+z^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{y^2}{\sqrt{3x^2+20xy+12y^2}}+\dfrac{z^2}{\sqrt{3x^2+20xz+12z^2}}+\dfrac{4}{\left(y+z\right)^2}$

**Bài 5. (2 điểm)**

1) Chứng minh rằng nếu $2^n=10a+b$ với $a,b,n$ là các số tự nhiên thỏa mãn $0<b<10$ và $n\ge 1$thì $ab$ chia hết cho 6

2) Viết lên bảng $229$ số tự nhiên liên tiếp : $1;2;3;.....;229$. Từ các số đã viết xóa đi 4 số bất kỳ $x;y;z;t$ rồi viết lên bảng số $\dfrac{x+y+z+t}{2}$(các số còn lại trên bảng giữ nguyên). Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số; gọi số đó là $a$. Chứng minh $a<2022$

## ĐÁP ÁN

**Bài 1. (2 điểm)**

**3) Cho biểu thức** $A=\dfrac{x+4}{\sqrt{x}}+\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x-2\sqrt{x}}+\dfrac{x^2-2x\sqrt{x}+8\sqrt{x}-16}{4\sqrt{x}-x\sqrt{x}}\left(\begin{matrix}x>0\\x\neq 4\end{matrix}\right)$

**Rút gọn biểu thức** $A$ **và chứng minh** $A>8$

$$A=\frac{x+4}{\sqrt{x}}+\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}{\sqrt{x}.\left(\sqrt{x}-2\right)}+\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x-2\sqrt{x}+4\right)}{\sqrt{x}.\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{x+4}{\sqrt{x}}+\frac{x+2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}-\frac{x-2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}}$$

Do $x>0,x\neq 4$ nên $\left(\sqrt{x}-2\right)^2>0\Rightarrow x+4>4\sqrt{x}\Rightarrow A>8$

**4) Cho phương trình** $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ **có hai nghiệm** $x_1,x_2$ **thỏa mãn** $0\le x_1,x_2\le 1$**.**

**Chứng minh** $\dfrac{3}{4}\le\dfrac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}\le 2$

Có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a};x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

$$\Rightarrow M=\frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}=\frac{\left(1-\dfrac{b}{a}\right)\left(2-\dfrac{c}{a}\right)}{1-\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}}=\frac{(1+x_1+x_2)(2-x_1x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2}$$

$M-2=\dfrac{-(3+x_1+x_2)x_1x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}\le 0\Rightarrow M\le 2$. Đẳng thức xảy ra khi $c=0;0\le -\dfrac{b}{a}\le 1$

$$M-\frac{3}{4}=\frac{5(1+x_1+x_2)-(7+4x_1+4x_2)x_1x_2}{4(1+x_1+x_2+x_1x_2)}=\frac{\left[5(1+x_1+x_2)-15x_1x_2\right]+(8-4x_1-4x_2)x_1x_2}{4(1+x_1+x_2+x_1x_2)}\ge 0$$

$\Rightarrow M\ge\dfrac{3}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=c,b=-2a$

**Bài 2. (2 điểm)**

**3) Giải phương trình** $x^2-10x+14=2\sqrt{2x+1}$

Điều kiện : $x\ge -\dfrac{1}{2}$. Đặt $\sqrt{2x+1}=a\left(a\ge 0\right)$

$PT\Leftrightarrow x^2-10x+14=2a\Leftrightarrow\left(x^2-8x+16\right)-\left(a^2+2a+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left(x-4\right)^2=\left(a+1\right)^2\Leftrightarrow x-4=\pm\left(a-1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}x=3-a\Rightarrow x=3-\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow x=4-2\sqrt{2}(tm)\\x=a+5\Rightarrow x=5+\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow x=6+2\sqrt{3}(tm)\end{matrix}\right.$$

Vậy $S=\left\{4-2\sqrt{2};6+2\sqrt{3}\right\}$

**4) Giải hệ phương trình** $\begin{cases} x^2+4y^2-4y=33(1) \\ x^2+2y^2-3xy+4x-5y+3=0(2) \end{cases}$

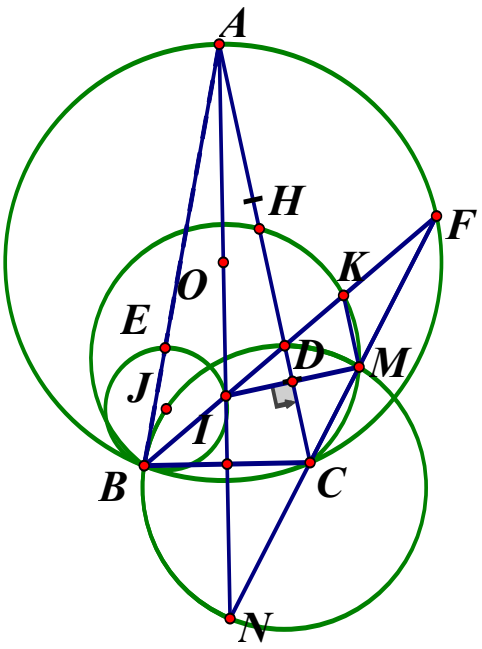
$Pt(2)\Leftrightarrow (x-y)(x-2y)+3(x-y)+(x-2y)+3\Leftrightarrow (x-y+1)(x-2y+3)=0$

$x-y+1=0\Rightarrow (1)\Leftrightarrow (y-1)^2+4y^2-4y=33\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2\Rightarrow x=-3 \\ y=\dfrac{16}{5}\rightarrow x=\dfrac{11}{5} \end{array}\right.$

$x-2y+3=0\Rightarrow (1)\Leftrightarrow (2y-3)^2+4y^2-4y=33\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1\Rightarrow x=-5 \\ y=3\Rightarrow x=3 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trinh có 4 nghiệm $(x;y)\in\left\{(-3;-2);\left(\dfrac{11}{5};\dfrac{16}{5}\right);(-5;-1);(3;3)\right\}$

**Bài 3. (3 điểm) Cho tam giác cân** $ABC(AB=AC>BC)$**nội tiếp đường tròn** $(O)$**. Các đường phân giác trong** $BD,CE$ **của tam giác cắt nhau tại** $I,BI$ **cắt đường tròn** $(O)$**tại** $F(F\neq B)$**. Điểm** $H$ **đối xứng với C qua** $D$**. Đường tròn ngoại tiếp tam giác** $HBC$ **cắt** $BI$ **tại K** $(K\neq B)$




**a) Chứng minh** $DC^2=DI.DB$ **và** $D$ **là trung điểm của đoạn thẳng** $IK$

Có $\Delta DCI\backsim\Delta DBC(g.g)\Rightarrow DC^2=DI.DB$

Tứ giác $BCKH$ nội tiếp nên $DK.DB=DC.DH=DC^2=DI.DB\Rightarrow DK=DI$

**b) Kẻ** $KM$ **song song với** $AC(M\in AC)$**. Chứng minh M là điểm đối xứng với** $I$ **qua AC**

$\angle MCA=\angle FCA=\angle FBA=\angle FBC=\angle KBC=\angle KHC$

$\Rightarrow KHCM$ là tứ giác nội tiếp và là hình thang cân

$\Rightarrow MC=KH=CI;\angle MCH=\angle ICH=\angle KHC$

$\Delta CMI$ cân tại C, phân giác $CD \Rightarrow M, I$ đối xứng nhau qua $AC$

**c) Gọi $N$ là giao điểm của $FC$ và $AI$; gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $IBE$. Chứng minh bốn điểm $M, N, J, D$ cùng thuộc một đường tròn**

$\angle MIC = 90° - \angle ACI = 90° - \angle ABI = \frac{1}{2}(180° - \angle EJI) \Rightarrow$ M,I, J thẳng hàng

$\angle JBI = \angle JIB = \angle DIM = \angle DMI \Rightarrow D; M; B; J$ cùng thuộc một đường tròn

$\angle MDB = 2\angle CDB = 2.(180° - \angle DBC - \angle DCB) = 2(180° - \angle ECA - \angle DCB)$

$= 2\angle BCN = 180° - \angle BNC = 180° - \angle BNM$

$\Rightarrow B; D; M; N$ cùng thuộc một đường tròn (đpcm)

**Bài 4. (1 điểm)**

**Xét $x, y, z$ là các số thực dương thỏa mãn $3x^2 \le 2(y^2 + 4yz + z^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{y^2}{\sqrt{3x^2 + 20xy + 12y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{3x^2 + 20xz + 12z^2}} + \frac{4}{(y+z)^2}$**

$2(y^2 + 4yz + z^2) \le 3(y+z)^2 \Rightarrow x^2 \le (y+z)^2 \Rightarrow x \le y + z$

$3x^2 + 20xy + 12y^2 = 4(x+2y)^2 - (x-2y)^2 \le 4(x+2y)^2$

Hoàn toàn tương tự : $3x^2 + 20xz + 12z^2 = 4(x+2z)^2 - (x-2z)^2 \le 4(x+2z)^2$

Suy ra $P \ge \frac{y^2}{2(x+2y)} + \frac{z^2}{2(x+2z)} + \frac{4}{(y+z)^2} \ge \frac{y^2}{2(3y+z)} + \frac{z^2}{2(3z+y)} + \frac{4}{(y+z)^2}$

Lại có : $\frac{y^2}{3y+z} + \frac{z^2}{3z+y} \ge \frac{(y+z)^2}{4y+4z} = \frac{y+z}{4} \Rightarrow P \ge \frac{y+z}{8} + \frac{4}{(y+z)^2}$

$\frac{y+z}{8} + \frac{4}{(y+z)^2} = \frac{y+z}{16} + \frac{y+z}{16} + \frac{4}{(y+z)^2} \ge 3\sqrt[3]{\frac{y+z}{16} \cdot \frac{y+z}{16} \cdot \frac{4}{(y+z)^2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow P \ge \frac{3}{4}$

Vậy $P_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 4; y = z = 2$

**Bài 5. (2 điểm)**

**3) Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ với $a, b, n$ là các số tự nhiên thỏa mãn $0 < b < 10$ và $n \ge 1$ thì $ab$ chia hết cho 6**

Ta có $2^n = 10a + b \vdots 2 \Rightarrow b \vdots 2$

Đặt $n = 4k + r \left(k \in \mathbb{N}; r \in \{0;1;2;3\}\right)$

$Th1: r = 0 \ : 2^n - 1 = 16^k - 1 \vdots 5 \Rightarrow 2^n - 6 \vdots 5 \Rightarrow n^n - 6 \vdots 10 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow ab \vdots 6$

$Th2: r \in \{1;2;3\} \Rightarrow 2^n - 2^r = 2^r(16^k - 1) \vdots 5 \Rightarrow 2^n - 2^r \vdots 10$

Mà $2^r \in \{2;4;8\} \Rightarrow b = 2^r \Rightarrow 10a = 2^n - 2^r = 2^r(16^k - 1) \vdots 3 \Rightarrow a \vdots 3 \Rightarrow ab \vdots 6$ (vì $b \vdots 2$)

**4) Viết lên bảng $229$ số tự nhiên liên tiếp : $1;2;3;.....;229$. Từ các số đã viết xóa đi 4 số bất kỳ $x;y;z;t$ rồi viết lên bảng số $\frac{x+y+z+t}{2}$ (các số còn lại trên bảng giữ nguyên). Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho đến khi trên bảng chỉ còn lại đúng một số; gọi số đó là $a$. Chứng minh $a<2022$**

Với mỗi tập hợp $\{x_1;x_2;.....;x_n\}$. Xét biểu thức $P(x_1;x_2;.....;x_n)=x_1^2+x_2^2+.....+x_n^2$

Chú ý rằng $x^2+y^2+z^2+t^2\geq\left(\frac{x+y+z+t}{2}\right)^2$ :

Suy ra mỗi lần xóa đi 4 số bất kỳ $x;y;z;t$ ồi viết lên bảng số $\frac{x+y+z+t}{2}$ thì giá trị biểu thức P của các số trên bảng không tăng lên (1)

Biểu thức $P$ ban đầu : $P(1;2;.....;229)=1^2+2^2+.....+229^2<2022^2\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $P(a)=a^2\leq P(1;2;....;229)<2022^2\Rightarrow a<2022$