

Bài 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$ với $x, y \geq 0$ và $xy \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{1 + 2024^2 + \frac{2024^2}{2023^2}} - 2023 \frac{1}{2023}$ và $y = 31 \frac{3}{2024}$.

Bài 2. a) Giải phương trình $(x + 5)^2 - 3(4x + 7) = 32 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + y)(1 + xy) = 5xy \\ (x^2 + y^2) \cdot \frac{x^2 y^2 + 1}{x^2 y^2} = 9 \end{cases}$$

Bài 3. Cho Parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + \frac{1}{2}$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

b) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

c) Gọi A và B là giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P).

Tìm tập hợp các trung điểm C của đoạn thẳng AB khi m thay đổi.

Bài 4. a) Bạn Hoàng mua ba cuốn sách tham khảo cho ba môn gồm Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh hết tất cả 324000 đồng. Biết rằng tiền mua cuốn sách Toán bằng $\frac{2}{7}$ tổng số tiền mua sách Ngữ văn

và sách Tiếng Anh, tiền mua cuốn sách Tiếng Anh bằng $\frac{4}{5}$ tổng số tiền mua sách Ngữ văn và sách

Toán. Hỏi bạn Hoàng đã mua mỗi cuốn sách bao nhiêu tiền?

b) Tìm các cặp số nguyên (a, b) thỏa mãn $a^2 b^2 + a^2 - 4a + 4(b - 1)^2 - 2ab(a + 2b - 4) = 1$

b) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $1 \leq x \leq y \leq z \leq 2$.

Chứng minh rằng $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq 10$.

Bài 5. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi D là một điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ $\widehat{BC}$, trên dây AD lấy điểm P sao cho $AP = CD$. Gọi Q là giao điểm của DA và BC.

a) Chứng minh rằng $DB \cdot DC = DA \cdot DQ$ và $DA = DB + DC$.

b) Chứng minh rằng $\frac{DQ}{DB} + \frac{DQ}{DC} = 1$.

c) Tính tổng $DA^2 + DB^2 + DC^2$ theo R.