

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2023-2024**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn : Toán (Dành cho chuyên Tin)

Thời gian :150 phút

Câu 1. (2, 0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2|x_1 + x_2| = |x_1 - x_2|$.

b) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$.

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$

b) Cho n là số nguyên dương lẻ sao cho $3^n + 7^n$ chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^n + 6^n + 2023^n$ cho 11.

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Giải hệ $\begin{cases} 2\sqrt{x-3y} = 16 - 3x + 9y & (1) \\ 2\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3} = 5y + 1 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

b) Viết lên trên bảng 2023 số $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2022}; \frac{1}{2023}$. Mỗi bước ta xóa đi 2 số x, y bất kỳ trên bảng

rồi viết lên bảng số $\frac{xy}{x+y+1}$ (các số còn lại trên bảng giữ nguyên). Thực hiện liên tục thao tác

trên cho đến khi trên bảng chỉ còn lại đúng 1 số. Hỏi số đó bằng bao nhiêu

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$, các đường cao $AD; BE; CF$ cắt nhau tại H . Gọi P là giao điểm thứ hai của AD và (O) .

M là điểm đối xứng với P qua AB .

a) Chứng minh tứ giác $AHBM$ nội tiếp.

b) Qua P kẻ đường thẳng song song với EF cắt (O) tại Q .

Chứng minh Q đối xứng với P qua OA .

c) Gọi K là trung điểm của EF .

Chứng minh rằng đường thẳng AK và các tiếp tuyến của (O) tại $B; C$ đồng quy.

Câu 5. Xét ba số $x; y; z \geq 2$ thỏa mãn $4xyz = 9(x + y + z) + 27$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} + \frac{\sqrt{y^2 - 4}}{y} + \frac{\sqrt{z^2 - 4}}{z}$

Gợi ý Đề chuyên tin 2023 – 2024 chuyên Hùng Vương – Phú Thọ

Nhóm giáo viên Toán trường THCS Lâm Thao

Câu 1. (2, 0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2|x_1 + x_2| = |x_1 - x_2|$.

b) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$.

Giải

a) Xét phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - m = 0$ (1)

Ta có $\Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (m^2 - m) = m^2 - 2m + 1 - m^2 + m = -m + 1$

Vì phương trình (1) là phương trình bậc hai nên để PT (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow -m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < 1$$

Khi đó áp dụng định lý Vi ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m^2 - m \end{cases}$$

Theo đề bài ta có: $2|x_1 + x_2| = |x_1 - x_2|$

$$\Leftrightarrow 4(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x_1 + x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)^2 + 4x_1 x_2 = 0$$

$$\Rightarrow 3[2(m-1)]^2 + 4(m^2 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(4m^2 - 8m + 4) + 4m^2 - 4m = 0$$

$$\Leftrightarrow 12m^2 - 24m + 12 + 4m^2 - 4m = 0$$

$$\Leftrightarrow 16m^2 - 28m + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 7m + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1) \cdot (4m-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ 4m-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{3}{4} \end{cases}$$

Mà $m < 1$ nên $m = \frac{3}{4}$

b) Từ $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} = \frac{3}{2x+y}$ (đk: $x \neq 0, y \neq 0; 2x+y \neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{x-2y}{xy} = \frac{3}{2x+y} \Leftrightarrow (x-2y)(2x+y) = 3xy$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + xy - 4xy - 2y^2 = 3xy$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - y^2) = 6xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 3xy$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^4 + y^4}{x^2 y^2} = \frac{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2}{x^2 y^2} = \frac{(3xy)^2 + 4x^2 y^2}{x^2 y^2} = \frac{13x^2 y^2}{x^2 y^2} = 13$$

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$

Vì $(x; y)$ nguyên dương nên từ điều kiện $2x+1 : x^2 - x - 1$

$$2x^2 + x : x^2 - x - 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 2 + 3x + 2 : x^2 - x - 1 \Rightarrow 3x + 2 : x^2 - x - 1$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} 2x+1 : x^2 - x - 1 \\ 3x+2 : x^2 - x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+3 : x^2 - x - 1 \\ 6x+3 : x^2 - x - 1 \end{cases} \Rightarrow 1 : x^2 - x - 1$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x^2 - x - 1 = 1 \\ x^2 - x - 1 = -1 \end{cases}$$

$$+) \text{ Với } x^2 - x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Từ } x = 2 \Rightarrow (y^2 + 2y - 9) = 5 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 15 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Với } x^2 - x - 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Từ } x = 1 \Rightarrow -(y^2 + y - 9) = 3 \Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y+3)(y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \text{ (loại)} \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$ là $x; y) = (1; 2)$.

b) Cho n là số nguyên dương lẻ sao cho $3^n + 7^n$ chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^n + 6^n + 2023^n$ cho 11.

Ta có: $3^n + 8^n + 7^n + 4^n : 11$ (vì n lẻ)

$$\Rightarrow 4^n + 8^n : 11 \Rightarrow 4^n (1 + 2^n) : 11 \Rightarrow 2^n + 1 : 11$$

$$n = 10k + 5 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Ta có $6^n = 6^{10k+5} = (6^{10})^k \cdot 6^5 \equiv -1(\text{mod}11); 2023^n \equiv -1(\text{mod}11)$

Suy ra $2^n + 6^n + 2023^n \equiv -3 \equiv 8(\text{mod}11)$

Vậy $2^n + 6^n + 2023^n \equiv 8(\text{mod}11)$

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Giải hệ
$$\begin{cases} 2\sqrt{x-3y} = 16-3x+9y & (1) \\ 2\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3} = 5y+1 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Điều kiện :
$$\begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq -3 \\ x \geq 3y \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{x-3y} = t \geq 0$ thay vào (1) ta được

$$2t = 16 - 3t^2 \Leftrightarrow 9t^2 + 6t + 1 = 49 \Leftrightarrow (3t+1)^2 = 7^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{-8}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $t = 2 \Rightarrow x - 2y = 4$ thay vào (2) ta được $2\sqrt{3y+1} + \sqrt{y+3} = 5y+1$ (3) ĐK $y \geq \frac{-1}{5}$

Suy ra $4y - 2\sqrt{3y+1} + y + 1 - \sqrt{y+3} = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{16y^2 - 12y - 4}{4y + 2\sqrt{3y+1}} + \frac{y^2 + y - 2}{y + 1 + \sqrt{y+3}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4(4y+1)(y-1)}{4y + 2\sqrt{3y+1}} + \frac{(y+2)(y-1)}{y + 1 + \sqrt{y+3}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (y-1) \left[\frac{4(4y+1)}{4y + 2\sqrt{3y+1}} + \frac{(y+2)}{y + 1 + \sqrt{y+3}} \right] = 0 \Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

(vì $y \geq \frac{-1}{5}$)

Từ $y = 1 \Rightarrow x = 7$

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) = (7; 1)$

b) Bằng phương pháp quy nạp ta sẽ chứng minh với cách xóa như vậy thì dãy $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}$ còn lại số

cuối cùng là $\frac{1}{(1+1).(1+1).(3+1) \dots (n+1) - 1}$ (*)

Thật vậy

Với $n = 2$ thì (*) đúng.

Giả sử đúng với $n = k$ thì dãy còn lại số $\frac{1}{(1+1).(2+1).(3+1)...(k+1)-1}$

Cần chứng minh (*) đúng với $n = k + 1$ tức là dãy còn lại số $\frac{1}{(1+1).(2+1).(3+1)...(k+1).(k+2)-1}$

Từ giả thiết quy nạp dãy $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{k}; \frac{1}{k+1}$ với quy luật xóa thì còn lại số $\frac{1}{(1+1).(2+1).(3+1)...(k+1)-1}$

Khi đó dãy $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{k}; \frac{1}{k+1}$ còn lại hai số $\frac{1}{(1+1).(2+1).(3+1)...(k+1)-1}; \frac{1}{k+1}$

Khi đó còn lại số $\frac{1}{(1+1).(2+1).(3+1)...(k+1).(k+1)-(k+1)+(k+1)+(1+1).(2+1).(3+1)...(k+1)-1}$
 $= \frac{1}{(1+1).(2+1).(3+1)...(k+1).(k+2)-1}$

Vậy (*) đúng.

Khi đó dãy $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2023}$ với cách xóa như vậy số cuối cùng còn lại của dãy là

$$\frac{1}{(1+1).(2+1).(3+1)...(2023+1)-1} = \frac{1}{2.3.4...2024-1}$$

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$, các đường cao $AD; BE; CF$ cắt nhau tại H . Gọi P là giao điểm thứ hai của AD và (O) .

M là điểm đối xứng với P qua AB .

a) Chứng minh tứ giác $AHBM$ nội tiếp.

b) Qua P kẻ đường thẳng song song với EF cắt (O) tại Q .

Chứng minh Q đối xứng với P qua OA .

c) Gọi K là trung điểm của EF .

Chứng minh rằng đường thẳng AK và các tiếp tuyến của (O) tại $B; C$ đồng quy.

Giải. Ta có $\sqrt{5}Q = \frac{\sqrt{5(x-2)(x+2)}}{x} + \frac{\sqrt{5(y-2)(y+2)}}{y} + \frac{\sqrt{5(z-2)(z+2)}}{z}$

$$\sqrt{5}Q \leq \frac{5(x-2)+x+2}{2x} + \frac{5(y-2)+y+2}{2y} + \frac{5(z-2)+z+2}{2z}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}Q \leq \frac{6x-8}{2x} + \frac{6y-8}{2y} + \frac{6z-8}{2z} = 9 - 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

Từ $4xyz = 9(x+y+z) + 27 \Leftrightarrow 4 = 9\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}\right) + \frac{27}{xyz} \leq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^3$

Đặt $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = t$

Ta có

$$t^3 + 3t^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow t^3 - t^2 + 4t^2 - 4t + 4t - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t-2)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t \geq 1$$

Suy ra $\sqrt{5}Q \leq 9 - 4.1 = 5 \Leftrightarrow Q \leq \sqrt{5}$

$$\text{Vậy } \text{Max}Q = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z \geq 2; 4xyz = 9(x+y+z) + 27 \\ 5(x-2) = x+2; 5(y-2) = y+2; 5(z-2) = z+2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 3$$

.....Hết.....