

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = (x-1)^2 \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right) \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị lớn nhất của P

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $2x^2 + x = 4(\sqrt{x-1})^3 + 6\sqrt{x-1}$

2) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 11x + 4 = 0$. . Hãy lập một phương trình bậc hai nhận hai số $x_1\sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_1}$ và $x_2\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$ làm hai nghiệm

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên tố p và q thỏa mãn $p^2 - 2q^2 = 1$

2) Ba cầu thủ của một đội bóng trò chuyện với nhau về số áo được in trên áo mỗi người, nội dung như sau:

An: Tôi nhận ra rằng các số trên áo của chúng ta đều là số nguyên tố có hai chữ số.

Bình: Tổng hai số trên áo của hai bạn là ngày sinh nhật của tôi đã trôi qua vào tháng này.

Chung: Thật thú vị! Tổng hai số trên áo của hai bạn là ngày sinh nhật của tôi sắp tới vào tháng này.

An: Và tổng hai số trên áo hai bạn là ngày hôm nay.

Hãy xác định số áo của An, Bình và Chung.

Câu 4. (1,0 điểm)

1) Cho biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ (với $a, b, c \in \mathbb{Q}, a > 0$). Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$. Chứng minh rằng nếu $\Delta \leq 0$ thì $f(x) \geq 0$ với mọi số thực x

2) Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta có :

$$3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) \geq 1 + xyz + x^2y^2z^2$$

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông ở B có BD là đường cao ($D \in AC$). M là điểm thuộc đường trung trực Δ của đoạn thẳng CD . Đường tròn đường kính MA cắt đường tròn tâm A bán kính AB tại E và F

a) Chứng minh $AE^2 = AD.AC$

b) Chứng minh $MC = ME$

c) Khi M di động trên Δ , chứng minh EF luôn đi qua một điểm cố định.

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = (x-1)^2 \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right) \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

c) Rút gọn P

$$\begin{aligned} P &= (x-1)^2 \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right) \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \\ &= (x-1)^2 \left[\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^2} \right] \\ &= \frac{(x-1)(x-\sqrt{x}-2-x-\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+1} = (\sqrt{x}-1)(-2\sqrt{x}) = -2x+2\sqrt{x} \end{aligned}$$

d) Tìm giá trị lớn nhất của P

$$\text{Ta có : } P = -2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $2x^2 + x = 4(\sqrt{x}-1)^3 + 6\sqrt{x}-1$

Điều kiện $x \geq 1$

$$2x^2 + x = 4(\sqrt{x}-1)^3 + 6\sqrt{x}-1 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 2\sqrt{x}-1(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-2\sqrt{x}-1) = 0 \Rightarrow x-2\sqrt{x}-1 \text{ (do } x \geq 1) \Rightarrow x = 2 \text{ (tmdk)}$$

2) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 11x + 4 = 0$. . Hãy lập một phương trình bậc hai nhận hai số $x_1\sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_1}$ và $x_2\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$ làm hai nghiệm

Theo định lý Vi-et ta có : $x_1 + x_2 = 11; x_1x_2 = 4$

Giả sử lập được phương trình bậc hai có hai nghiệm $X_1 = x_1\sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_1}$; $X_2 = x_2\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$

Dễ thấy $X_1 > 0, X_2 > 0$. Ta có :

$$X_1 = \sqrt{x_1}(\sqrt{x_1x_2} + 2) = 4\sqrt{x_1}; X_2 = \sqrt{x_2}(\sqrt{x_2x_1} + 2) = 4\sqrt{x_2}$$

$$\text{Suy ra } X_1X_2 = 16\sqrt{x_1x_2} = 32 \text{ (1)}$$

$$X_1^2 + X_2^2 = 16(x_1 + x_2) \Leftrightarrow (X_1 + X_2) - 2X_1X_2 = 176 \Leftrightarrow (X_1 + X_2)^2 = 240$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} X_1 + X_2 = 4\sqrt{15} \\ X_1 + X_2 = -4\sqrt{15} \end{cases} (2)$$

Từ (1) và (2) kết hợp với $X_1 > 0, X_2 > 0$, suy ra phương trình cần lập là $x^2 - 4\sqrt{15}x + 32 = 0$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên tố p và q thỏa mãn $p^2 - 2q^2 = 1$

Từ giả thiết, ta có $p^2 = 2q^2 + 1$, suy ra p lẻ

Khi đó $2q^2 = p^2 - 1 = (p-1)(p+1):4 \Rightarrow q:2 \Rightarrow q = 2$ (do q nguyên tố)

Suy ra $p = 3$

Vậy $p=3, q=2$

2) Ba cầu thủ của một đội bóng trò chuyện với nhau về số áo được in trên áo mỗi người, nội dung như sau:

An: Tôi nhận ra rằng các số trên áo của chúng ta đều là số nguyên tố có hai chữ số.

Bình: Tổng hai số trên áo của hai bạn là ngày sinh nhật của tôi đã trôi qua vào tháng này. Chung: Thật thú vị! Tổng hai số trên áo của hai bạn là ngày sinh nhật của tôi sắp tới vào tháng này.

An: Và tổng hai số trên áo hai bạn là ngày hôm nay.

Hãy xác định số áo của An, Bình và Chung.

Gọi A, B, C lần lượt là số áo của An, Bình, Chung

Ta có A, B, C đều là số nguyên tố có 2 chữ số, không lớn hơn 31 và tổng 2 số bất kỳ trong 3 số không vượt quá 31 nên $A, B, C \in \{1; 13; 17\}$

Từ giả thiết ta cũng suy ra được $A + C < B + C < A + B \Rightarrow C < A < B$

Vậy số áo của An là 13, số áo của Bình là 17, số áo của Chung là 11

Câu 4. (1,0 điểm)

3) Cho biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ (với $a, b, c \in \mathbb{Q}, a > 0$). Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$. Chứng minh rằng nếu $\Delta \leq 0$ thì $f(x) \geq 0$ với mọi số thực x

$$\text{Ta có } f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Do vậy nếu $a > 0$ và $\Delta \leq 0$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{Q}$

4) Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta có :

$$3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) \geq 1 + xyz + x^2y^2z^2$$

Đặt $p = (x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1); q = xy$. Dễ thấy $p > 0, \forall x, y \in \mathbb{Q}$

BĐT trở thành : $(3p - q^2)z^2 - (3p + q)z + 3p - 1 \geq 0$

Xét $g(z) = (3p - q^2)z^2 + (3p + q)z + 3p - 1$

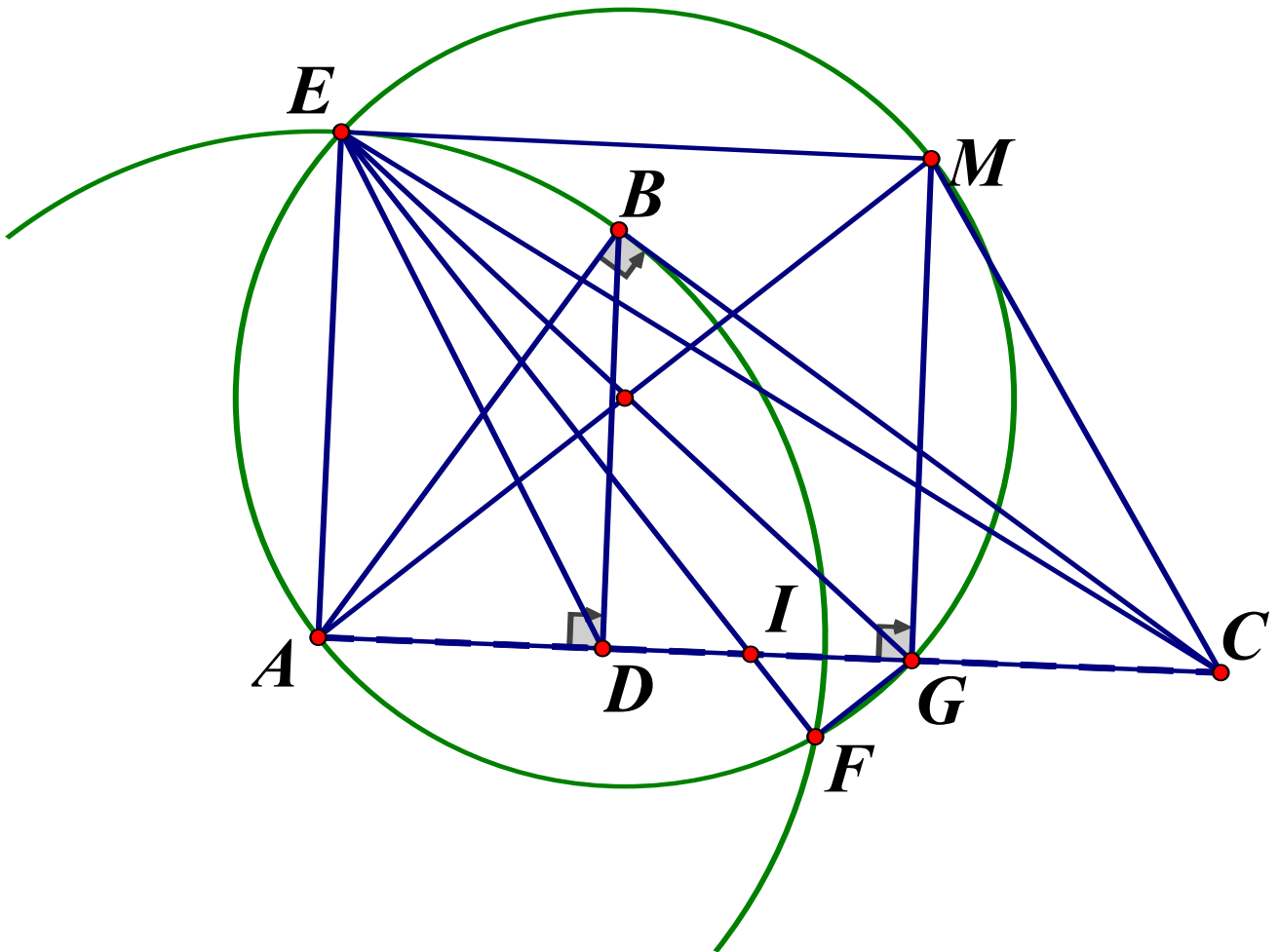
$$\text{Ta có } \Delta = (3p + q)^2 - 4(3p - q^2)(3p - 1) = -3(p - q)^2 - 12(2p - q^2 - 1)$$

Vì $2p - q^2 - 1 = [xy - (x + y) + 1]^2 + (x - y)^2 = (1 - x^2)(1 - y^2) + (x + y)^2 \geq 0 \forall x, y \in \square$

Suy ra $3p - q^2 = p + 2q - q^2 > 0$ và $\Delta \leq 0, \forall x, y \in \square$

Vậy $g(z) \geq 0, \forall x, y, z \in R$, Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông ở B có BD là đường cao ($D \in AC$). M là điểm thuộc đường trung trực Δ của đoạn thẳng CD . Đường tròn đường kính MA cắt đường tròn tâm A bán kính AB tại E và F



d) Chứng minh $AE^2 = AD.AC$

$AD.AC = AB^2 = AE^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

e) Chứng minh $MC = ME$

$$AM^2 = AE^2 + ME^2 = AD.AC + ME^2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} AM^2 &= AG^2 + MG^2 = (AD + DG)^2 + MG^2 \\ &= MD^2 + AD.(AD + 2DG) = MD^2 + AD.AC \end{aligned}$$

$$(1), (2) \Rightarrow MD = ME \Leftrightarrow MC = ME$$

f) Khi M di động trên Δ , chứng minh EF luôn đi qua một điểm cố định.

Do $MF = ME$ nên từ b, suy ra $ME = MC = MD = MF$, hay $CEDF$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $IE.IF = IC.ID$ (với I là giao điểm của CD và EF)

Mặt khác G, E, A, F cùng thuộc một đường tròn nên $IE.IF = IG.IA$ (với G là trung điểm CD)

Từ đó suy ra $IC.ID = IG.IA$

Từ đây có thể tính được $ID = \frac{DG.DA}{GA} \Rightarrow I$ cố định