

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

Câu I. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tìm tất cả các số nguyên của x để $|2A-1|+1=2A$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4$.
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3+xy(2y-x)+2x^2+6x=xy+y^3+3y \\ \sqrt{3(x^2+y)+7}+\sqrt{5x^2+5y+14}=4-y-x^2 \end{cases}$.

Câu III. (1,0 điểm)

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương.

Câu IV. (4,0 điểm)

Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O . Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC . Tia MH cắt đường tròn (O) tại K , đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và AE là đường kính của đường tròn (O) .

1. Chứng minh $BAD = CAE$.
2. Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD = HK.HM$.
3. Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J . Chứng minh rằng các đường thẳng AK , BC và HJ cùng đi qua một điểm.
4. Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại P , Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng PQ . Chứng minh rằng đường thẳng AN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu V. (1,0 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}.$$

--- HẾT ---

Thí sinh được sử dụng máy tính bỏ túi không có chức năng soạn thảo văn bản và không có thẻ nhớ.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi số 1..... Cán bộ coi thi số 2.....

ĐỀ CHÍNH THỨC

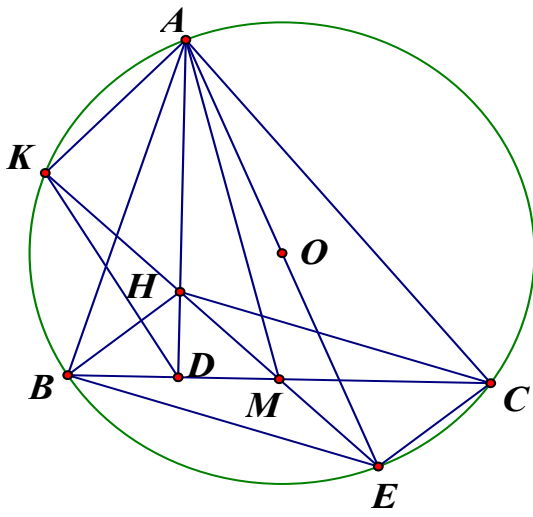
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (ĐỀ CHUYÊN)

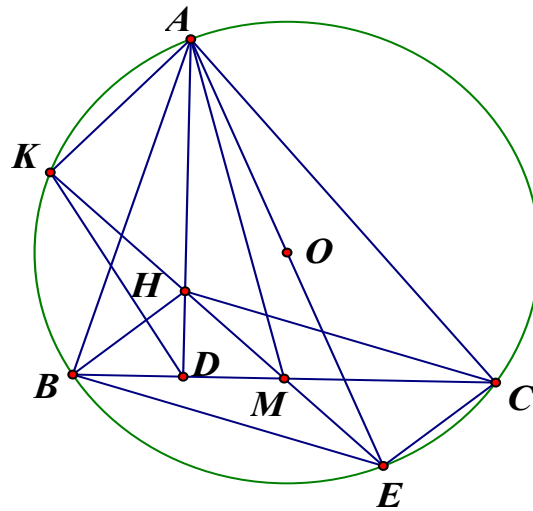
Ghi chú:

- Điểm toàn bài không làm tròn.
- Các cách giải khác mà đúng cho điểm tương đương.

Nội dung	Điểm
Câu I (2,0 điểm).	
Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.	
1.(1,5 điểm) Rút gọn biểu thức A .	
$A = \frac{(\sqrt{x})^3 - 1}{1 + \sqrt{x} + x} \cdot \left[\frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} \right]$	0,5
$= \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{1 + \sqrt{x} + x} \cdot \left[\frac{\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} \right]$	0,25
$= (\sqrt{x} - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)$	0,25
$= (\sqrt{x} - 1) \frac{2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$	0,25
$= \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$	0,25
2.(0,5 điểm) Tìm tất cả các số nguyên của x để $ 2A - 1 + 1 = 2A$.	
$+) 2A - 1 + 1 = 2A \Leftrightarrow 2A - 1 = 2A - 1 \Leftrightarrow 2A - 1 \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \frac{1}{2}$	0,25
$+) \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 9$ Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4 \Rightarrow x \in \{0; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}$	0,25
Câu II (2,0 điểm).	
1.(1,0 điểm) Giải phương trình $(x - 1)\sqrt{x^2 + 6x + 16} = 2x^2 - 6x + 4$.	
$(x - 1)\sqrt{x^2 + 6x + 16} = 2x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow (x - 1)\sqrt{x^2 + 6x + 16} = (x - 1)(2x - 4)$ $\Leftrightarrow (x - 1)(\sqrt{x^2 + 6x + 16} - 2x + 4) = 0$	0,25
$+) x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$	0,25
$+) \sqrt{x^2 + 6x + 16} = 2x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x^2 + 6x + 16 = (2x - 4)^2 \end{cases}$	

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x^2 - 22x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 0(l) \\ x = \frac{22}{3}(tm) \end{cases} \end{cases}$	0,25
Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1; x = \frac{22}{3}$	0,25
2.(1,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + xy(2y - x) + 2x^2 + 6x = xy + y^3 + 3y & (1) \\ \sqrt{3(x^2 + y) + 7} + \sqrt{5x^2 + 5y + 14} = 4 - y - x^2 & (2) \end{cases}$.	
Điều kiện: $\begin{cases} 3(x^2 + y) + 7 \geq 0 \\ 5x^2 + 5y + 14 \geq 0 \end{cases}$ Phương trình (1) tương đương với $2x^3 + 2xy^2 - x^2y + 2x^2 + 6x = xy + y^3 + 3y$ $\Leftrightarrow (2x^3 - x^2y) + (2xy^2 - y^3) + (2x^2 - xy) + (6x - 3y) = 0$ $\Leftrightarrow x^2(2x - y) + y^2(2x - y) + x(2x - y) + 3(2x - y) = 0$ $\Leftrightarrow (2x - y)(x^2 + y^2 + x + 3) = 0$	0,25
$\Leftrightarrow (2x - y)\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{11}{4}\right] = 0$ $\Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$	0,25
Thay $y = 2x$ vào phương trình (2) ta được $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$ $\Leftrightarrow (\sqrt{3x^2 + 6x + 7} - 2) + (\sqrt{5x^2 + 10x + 14} - 3) + (x^2 + 2x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{3(x+1)^2}{\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + 2} + \frac{5(x+1)^2}{\sqrt{5x^2 + 10x + 14} + 3} + (x+1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x+1)^2 \left(\frac{3}{\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + 2} + \frac{5}{\sqrt{5x^2 + 10x + 14} + 3} + 1 \right) = 0$	0,25
Vì $\frac{3}{\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + 2} + \frac{5}{\sqrt{5x^2 + 10x + 14} + 3} + 1 > 0$ nên phương trình tương đương với $(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2 (tm)$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-1; -2)$	0,25
Câu III. (1,0 điểm) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2024} + 2^{2027} + 2^n$ là số chính phương.	
Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn đề bài. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $2^{2024} + 2^{2027} + 2^n = k^2 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^{2024} + 2^n = k^2 \Leftrightarrow (k + 3 \cdot 2^{1012})(k - 3 \cdot 2^{1012}) = 2^n$.	0,25
$\Rightarrow \begin{cases} k + 3 \cdot 2^{1012} = 2^a \\ k - 3 \cdot 2^{1012} = 2^b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^a - 2^b = 3 \cdot 2^{1013} \\ a, b \in \mathbb{N}, a + b = n \end{cases}$	0,25

$\Leftrightarrow 2^b(2^{a-b} - 1) = 3.2^{1013} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{a-b} - 1 = 3 \\ 2^b = 2^{1013} \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ b=1013 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1015 \\ b=1013 \end{cases} \Rightarrow n=2028$ Vậy với $n=2028$ thì $2^{2024} + 2^{2027} + 2^n$ là số chính phương	0,25
Câu IV. (4 điểm) Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O . Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC . Tia MH cắt đường tròn (O) tại K , đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và AE là đường kính của đường tròn (O) .	
	
1. (1,0 điểm) Chứng minh $BAD = CAE$.	
$AH \perp BC \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$	0,25
$\angle ABE = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)	0,25
Suy ra $\angle BAD = \angle CBE$ (cùng phụ với $\angle ABC$)	0,25
Mà $\angle CBE = \angle CAE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC)	0,25
Suy ra $\angle BAD = \angle CAE$.	0,25
2. (1,0 điểm) Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD = HK.HM$.	



Ta có $\widehat{ACE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow EC \perp AC$.

Mà H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow BH \perp AC$. Từ đó suy ra $EC \parallel BH$.

Tương tự $HC // BE$

0,25

Xét tứ giác $BHCE$ có $EC \parallel BH$ và $HC \parallel BE$ nên tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.

0,25

Mà M là trung điểm của BC nên ba điểm H, M, E thẳng hàng.

Lại có ba điểm M, K, H thẳng hàng. Từ đó suy ra ba điểm K, H, E thẳng hàng.

Ta có $\widehat{AKE} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AKM} = 90^\circ$.

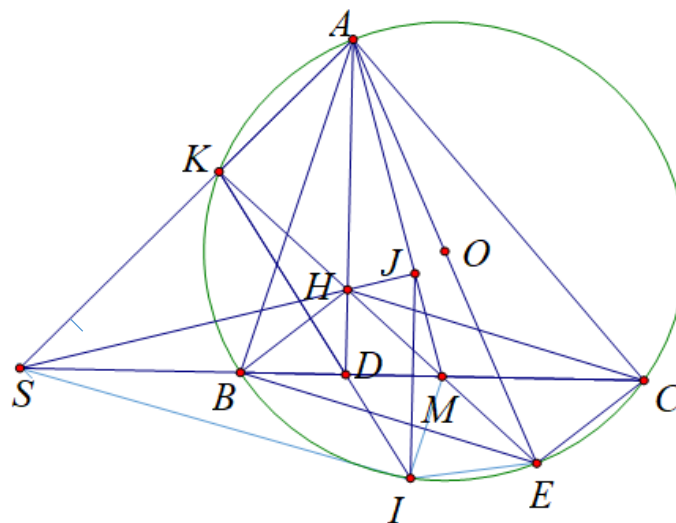
Xét $\triangle AKH$ và $\triangle MDH$ có: $\angle AKM = \angle MDH (= 90^\circ)$; $\angle KHA = \angle DHM$ (hai góc đối đỉnh).

0,25

$$\Rightarrow \Delta AKH \sim \Delta MDH \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HA}{HM} = \frac{HK}{HD} \Rightarrow HA.HD = HK.HM.$$

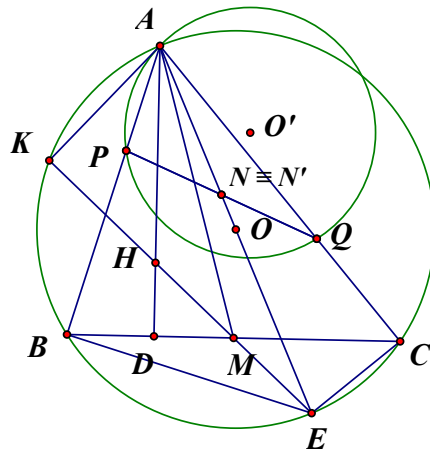
0,25

3. (1,0 điểm) Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J . Chứng minh rằng các đường thẳng AK , BC và HJ cùng đi qua một điểm.



Kéo dài AK cắt đường thẳng BC tại S , ΔSAM có hai đường cao AD và MK cắt nhau tại $H \Rightarrow H$ là trực tâm tam giác SAM .

Xét tam giác $\triangle HDM$ và $\triangle SDA$ có $ADS = HDM = 90^\circ$ và $DMH = DAS$ (cùng phụ với

ASM). $\Rightarrow \Delta HDM \sim \Delta SDA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HD}{DM} = \frac{DS}{AD} \text{ (1)}$	
Tương tự H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow \Delta BDH \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{BD}{HD} = \frac{AD}{CD} \text{ (2)}$	0,25
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{HD}{DM} \cdot \frac{BD}{HD} = \frac{DS}{AD} \cdot \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{DS}{CD} \Rightarrow BD \cdot CD = DM \cdot DS \text{ (3)}$	
Mà $\Delta BDK \sim \Delta IDC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BD}{ID} = \frac{DK}{DC} \Rightarrow BD \cdot CD = DI \cdot DK \text{ (4)}$	0,25
Từ (3) và (4) $\Rightarrow DI \cdot DK = DM \cdot DS$ nên $SKMI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow SMI = SKI$. Mà $AKDM$ là tứ giác nội tiếp (do $AKM = ADM = 90^\circ$) $\Rightarrow SKI = DMA$. Từ đó suy ra $SMI = DMA$. Xét ΔMIJ có $SMI = DMA$ và $IJ \perp BC \Rightarrow BC$ là đường trung trực của IJ .	0,25
$\Rightarrow SJM = SIM = 90^\circ$ (vì $SKMI$ là tứ giác nội tiếp nên $SIM = 180^\circ - SKM = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$) $\Rightarrow SJ \perp AM$. Mà H là trực tâm $\Delta SAM \Rightarrow SH \perp AM$. Từ đó suy ra ba điểm S, H, J thẳng hàng. Vậy các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua điểm S .	0,25
4.(1,0 điểm) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng PQ . Chứng minh rằng đường thẳng AN luôn đi qua một điểm cố định.	
	
Gọi N' là giao điểm của PQ và AE . Xét $\Delta AQN'$ và ΔBEM có: $QAN' = EBM$; $AQN' = KAP = BEM$ $\Rightarrow \Delta AQN' \sim \Delta BEM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AN'}{QN'} = \frac{BM}{EM} \text{ (5)}$	0,25
Do $QAN' = EBM$; $AQN' = KAP = BEM$ nên theo tính chất góc ngoài của $\Delta AQN'$ và ΔBEM ta có $EMC = PN'A$.	0,25
Mà $PAN' = ECM$ nên $\Delta ECM \sim \Delta PAN' \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{CM}{EM} = \frac{AN'}{PN'} \text{ (6)}$	0,25

Từ (5) và (6) và kết hợp $BM = CM \Rightarrow \frac{AN'}{QN'} = \frac{AN'}{PN'} \Rightarrow QN' = PN' \Rightarrow N \equiv N'$. Vậy AN luôn đi qua một điểm cố định O.	0,25
Câu V. (1,0 điểm) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}}.$	
Với $a, b, c > 0$, chứng minh được: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \sqrt{3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}$	0,25
Với $a, b > 0$, ta có : $5a^2 + 2ab + 2b^2 = (4a^2 + 4ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$ $= (2a+b)^2 + (a-b)^2 \geq (2a+b)^2$ $\Rightarrow \sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2} \geq \sqrt{(2a+b)^2} = 2a+b$	0,25
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} \leq \frac{1}{2a+b} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$ Tương tự: $\frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right); \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{2}{c} + \frac{1}{a}\right)$	0,25
$P \leq \frac{1}{9}\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{c} + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Rightarrow P \leq \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3}$ Vậy $\max P = \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.	0,25

--HẾT--