

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS

NĂM HỌC 2024-2025

ĐỀ CHÍNH THỨCĐỀ THI MÔN: TOÁNThời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{3}{1+\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}\right)$.

a. Rút gọn biểu thức P .b. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , các đường thẳng $y=2$, $y=6$, $y=mx-2$ ($m \neq 0$) và trục tung cắt nhau, phần chung giữa chúng tạo thành một hình thang. Tìm m để diện tích hình thang đó bằng 4 đơn vị diện tích.

Câu 3. Tìm hằng số a, b, c sao cho $ax^3 + bx^2 + c$ chia hết cho $x+2$ và chia cho x^2-1 dư 5.

Câu 4. Giải phương trình $x^2 - 6x + 2 = 2(2-x)\sqrt{2x-1}$.

Câu 5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2 - x + 2)y + x = 0 \\ (x^4 - 4x^2 - 1)y^2 + (2x^3 + x)y + x^2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 6. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3AD=3a$. Trên cạnh DC lần lượt lấy hai điểm P, Q sao cho $DP=PQ=QC$. Chứng minh hai tam giác $\triangle PAQ$ và $\triangle PCA$ đồng dạng.

Câu 7. Trên một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $200 m^2$, người chủ lấy một phần đất để trồng hoa. Biết phần đất trồng hoa là hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H , với H thuộc đường chéo BD . Hỏi số tiền lớn nhất mà người chủ cần dùng để trồng hoa là bao nhiêu? Biết rằng chi phí trồng hoa là 50000 đồng / m^2 .

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$ có M là một điểm tùy ý trên đường chéo AC . Kẻ ME vuông góc với AB tại E , MF vuông góc với BC tại F . Chứng minh ba đường thẳng AF, CE và MD đồng quy.

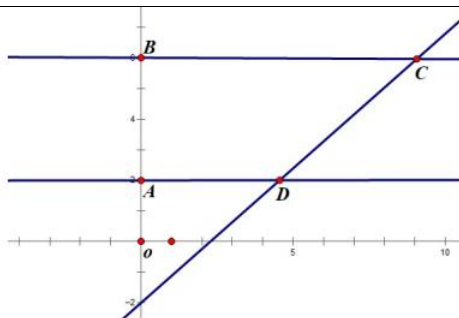
Câu 9. Cho nửa đường tròn đường kính AB , tâm O và bán kính R . Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn đó vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn, trên tia Ax lấy điểm M sao cho $AM > R$. Từ M vẽ tiếp tuyến MC tiếp xúc với nửa đường tròn đã cho tại điểm C . Từ điểm C vẽ CH vuông góc với AB tại H . Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BC tại N .

a. Chứng minh tứ giác $MNCO$ là hình thang cân.b. Đường thẳng MO cắt CA tại I , đường thẳng MB cắt CH tại K . Chứng minh IK song song với AB .

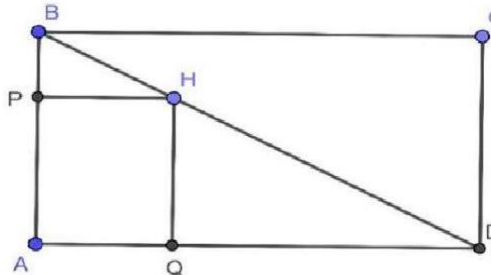
Câu 10. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh
$$\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \leq \frac{3}{2}.$$

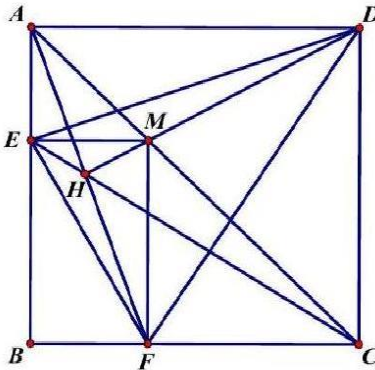
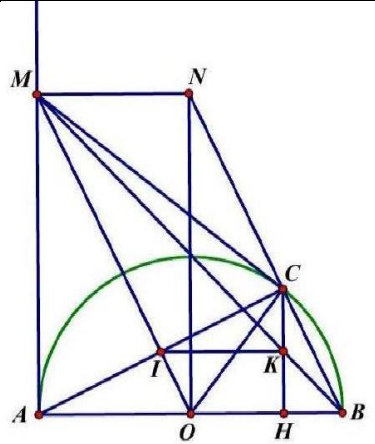
-----Hết-----

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1 (2,0đ)	Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{3}{1+\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}\right)$.	
	a. Rút gọn biểu thức P .	
	b. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.	
	a. Điều kiện xác định: $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$	0,25
	$P = \frac{\sqrt{x}-2}{1+\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2}\right)$	0,25
	$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}-6 - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2) + (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$	0,5
	$= -\frac{1}{\sqrt{x}-3}$	0,25
	b. Để P nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x}-3$ là ước của 1.	
	Do đó $\begin{cases} \sqrt{x}-3=1 \\ \sqrt{x}-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=4 \\ \sqrt{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \text{ (tm)} \\ x=4 \text{ (l)} \end{cases}$	0,5
	Vậy $x=16$.	0,25
2 (2,0đ)	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, các đường thẳng $y=2, y=6, y=mx-2 (m \neq 0)$ và trục tung cắt nhau, phần chung giữa chúng tạo thành một hình thang. Tìm m để diện tích hình thang đó bằng 4 đơn vị diện tích.	
		
	+ Kí hiệu hình thang $ABCD$ như hình vẽ. A là giao điểm của đường thẳng $y=2$ và trục Oy nên $A(0;2)$. B là giao điểm của đường thẳng $y=6$ và trục Oy nên $B(0;6)$.	0,25
	C là giao điểm của đường thẳng $y=6$ và đường thẳng $y=mx-2$ nên $C\left(\frac{8}{m}; 6\right)$.	0,25
	D là giao điểm của đường thẳng $y=2$ và đường thẳng $y=mx-2$ nên $D\left(\frac{4}{m}; 2\right)$.	0,25

	$S_{ABCD} = \frac{(AD+BC) \cdot AB}{2} = \left[\left(\frac{4}{ m } + \frac{8}{ m } \right) \cdot 4 \right] : 2 = \frac{24}{ m }$	0,5
	Theo giả thiết $S_{ABCD} = 4 \Rightarrow \frac{24}{ m } = 4 \Rightarrow m = \pm 6$	0,5
	Vậy $m = \pm 6$.	0,25
3 (2,0đ)	Tìm hằng số a, b, c sao cho $ax^3 + bx^2 + c$ chia hết cho $x+2$ và chia cho $x^2 - 1$ dư 5	
	Theo bài ra ta có: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$	0,25
	Khi đó ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + c = (x+2)A(x)$	0,5
	$f(x) = (x-1)(x+1)B(x) + 5$	0,25
	Cho $x = -2, x = 1, x = -1$. Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} -8a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = 5 \\ -a + b + c = 5 \end{cases}$	0,5
4 (2,0đ)	Giải hệ ta được: $a = 0, b = -\frac{5}{3}, c = \frac{20}{3}$	0,5
	Giải phương trình $x^2 - 6x + 2 = 2(2-x)\sqrt{2x-1}$.	
	Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$. Đặt $t = \sqrt{2x-1} (t \geq 0)$ thì $2x = t^2 + 1$.	0,25
	Khi đó ta có $x^2 - 6x + 2 - 2(2-x)t = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2tx - 4t - 3(t^2 + 1) + 2 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x+t)^2 - (2t+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+3t+1)(x-t-1) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x-1=t$ (do $x+3t+1 > 0; \forall x \geq \frac{1}{2}; \forall t \geq 0$)	0,5
5 (2,0đ)	Với $x-1=t$ ta có $x-1 = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}$.	0,5
	Đổi chiếu điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là $S = \{2 + \sqrt{2}\}$	
	Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2 - x + 2)y + x = 0 \\ (x^4 - 4x^2 - 1)y^2 + (2x^3 + x)y + x^2 = 0 \end{cases} \quad (I)$	
	$(x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm của (I). Mọi cặp số $(x; 0)$ và $(0; y)$ với $x \neq 0, y \neq 0$ đều không phải là nghiệm của (I).	0,5
	HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x(xy+1) + 2y = xy \\ x^2(xy+1)^2 + xy(xy+1) - y^2 = 5x^2y^2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right) + \frac{2}{x} = 1 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{y}\right)\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 5 \end{cases}$	0,25

	Đặt $a = x + \frac{1}{y}, b = \frac{1}{x} (b \neq 0)$, hệ trên trở thành: (II) $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a^2 + ab - b^2 = 5 \end{cases}$	0,5
	Giải hệ (II) được: $(a; b) = (3; -1)$ và $(a; b) = (-7; 4)$	
	+ Với $(a; b) = (3; -1)$ thì: $(x; y) = \left(-1; \frac{1}{4}\right)$ + Với $(a; b) = (-7; 4)$ thì: $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; -\frac{4}{29}\right)$ Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ (0; 0), \left(-1; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}; -\frac{4}{29}\right) \right\}$.	0,25 0,25
6 (2,0đ)	Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3AD = 3a$. Trên cạnh DC lần lượt lấy hai điểm P, Q sao cho $DP = PQ = QC$. Chứng minh hai tam giác $\triangle PAQ$ và $\triangle PCA$ đồng dạng.	
	Ta có $PA = a\sqrt{2}; PQ = a; PC = 2a$ Hai tam giác $\triangle PAQ$ và $\triangle PCA$ có: $\hat{P}$ chung (1)	0,5
	$\frac{PA}{PC} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2)	0,5
	$\frac{PQ}{PA} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3)	0,5
	Từ (2); (3) $\Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PQ}{PA}$ (4) Từ (1); (4) $\Rightarrow \triangle PAQ$ và $\triangle PCA$ đồng dạng.	0,5
7 (2,0đ)	Trên một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích $200 m^2$, người chủ lấy một phần đất để trồng hoa. Biết phần đất trồng hoa là hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H , với H thuộc đường chéo BD . Hỏi số tiền lớn nhất mà người chủ cần dùng để trồng hoa là bao nhiêu? Biết rằng chi phí trồng hoa là 50000 đồng $/m^2$.	
		
	Đặt $\frac{BH}{BD} = x, (0 < x < 1)$ và P, Q lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AD .	0,5
	Theo Thales ta có $\frac{HP}{AD} = \frac{BH}{BD} = x \Rightarrow HP = x \cdot AD; \frac{HQ}{AB} = \frac{DH}{DB} = 1 - x \Rightarrow HQ = (1 - x) AB$	0,5
	Diện tích trồng hoa là $S_{APHQ} = HP \cdot HQ = x(1 - x) \cdot AB \cdot AD = x(1 - x) \cdot S_{ABCD} = 200x(1 - x)$ $= 200\left(x - x^2\right) = -200\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 50 \leq 50$. Do đó diện tích trồng hoa lớn nhất là $50 m^2$	0,75

	Số tiền lớn nhất để trồng hoa là: $50000 \times 50 = 2500000$ đồng.	0,25
8 (2,0đ)	Cho hình vuông $ABCD$. M là một điểm tùy ý trên đường chéo AC. Kẻ ME vuông góc với AB tại E, MF vuông góc với BC tại F. Chứng minh ba đường thẳng AF, CE và MD đồng quy. 	
	Ta có $ME = BF = AE$; $MF = BE = CF$.	0,25
	Xét $\triangle ADE = \triangle BAF$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle ADE = \angle BAF$ mà $\angle ADE + \angle AED = 90^\circ \Rightarrow \angle BAF + \angle AED = 90^\circ \Rightarrow AF \perp DE$.	0,5
	Tương tự $\triangle CDF = \triangle BCE \Rightarrow CE \perp DF$	0,25
	$MF \parallel DC \Rightarrow \angle MFD = \angle CDF = \angle BCE = \angle FCE \Rightarrow \angle DMF = \angle EFC \Rightarrow MD \perp EF$	0,5
	Các đường thẳng AF , CE và MD là 3 đường cao trong tam giác DEF nên đồng quy. (ĐPCM)	0,5
9 (2,0đ)	Cho nửa đường tròn có đường kính AB, tâm O và bán kính R. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn đó vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn, trên tia Ax lấy điểm M sao cho $AM > R$. Từ M vẽ tiếp tuyến MC tiếp xúc với nửa đường tròn đã cho tại điểm C. Từ điểm C vẽ CH vuông góc với AB tại H. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BC tại N. a. Chứng minh tứ giác $MNCO$ là hình thang cân. b. Đường thẳng MO cắt CA tại I, đường thẳng MB cắt CH tại K. Chứng minh IK song song với AB. 	
	a) Ta có $OA = OB = OC = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại đỉnh $C \Rightarrow CN \perp AC$ $\triangle OMA = \triangle OMC$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow \angle OMA = \angle OMC, OM \perp AC$ tại trung điểm I của đoạn $AC \Rightarrow CN \parallel OM \Rightarrow MNCO$ là hình thang.	0,25

10 (2,0đ)	Ta có $CH // ON // AM \Rightarrow BCH = CNO = OMA$ $\Rightarrow OMC = ONC = MON \Rightarrow MNCO$ là hình thang cân. (ĐPCM)	0,5
	$\Rightarrow OMC = ONC = MON \Rightarrow MNCO$ là hình thang cân. (ĐPCM)	0,25
	b) $\triangle OMA \sim \triangle BCH \Rightarrow \frac{CH}{MA} = \frac{BH}{OA} = \frac{BH}{R}; KH // MA \Rightarrow \frac{KH}{MA} = \frac{BH}{2R}$ $\Rightarrow \frac{KH}{CH} = \frac{1}{2}$ mà I là trung điểm đoạn $AC \Rightarrow IK // AH \Rightarrow IK // AB$. (ĐPCM)	0,5
	$\Rightarrow \frac{KH}{CH} = \frac{1}{2}$ mà I là trung điểm đoạn $AC \Rightarrow IK // AH \Rightarrow IK // AB$. (ĐPCM)	0,5
	Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \leq \frac{3}{2}$.	
	Ta có $3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \geq 0$ $\Rightarrow (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ nên với $x, y, z > 0$ ta có $x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}$	0,25
	Ta có $\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \leq \sqrt{3\left(\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2}\right)}$	0,5
	Với $x, y > 0$ ta có $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{x + y} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ Áp dụng ta có $\frac{1}{ab+a+2} = \frac{1}{ab+1+a+1} = \frac{1}{ab+abc+a+1} = \frac{1}{ab(c+1)+(a+1)}$ $\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab(c+1)} + \frac{1}{a+1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{abc}{ab(c+1)} + \frac{1}{a+1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1}\right)$ Vậy ta có $\frac{1}{ab+a+2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1}\right)$	0,5
	Tương tự ta có $\frac{1}{bc+b+2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right); \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)$	0,25
	nên $\sqrt{3\left(\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2}\right)}$ $\leq \sqrt{3 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)} = \frac{3}{2}$.	0,25
	Vậy $\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \leq \frac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.	0,25