

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Tìm điều kiện của x để biểu thức $A = \sqrt{2x-1}$ có nghĩa. Tính giá trị của A khi $x = 5 - 2\sqrt{5}$
2. Tìm a để giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \frac{1}{x - \sqrt{x+a}}$ (với $x > 0$) bằng 2022

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Giải phương trình $(2x+3)^4 - 14(2x+3)^2 + 45 = 0$
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$
3. Giải phương trình $2(4x-7)\sqrt{x-2} = (2+\sqrt{x-3})(x+4\sqrt{x-3}+2)$

Câu 3. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là (P) .

Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị (P) và có hoành độ lần lượt là $x_A = -1; x_B = 3$. Tìm a, b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B

Câu 4. (2,5 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O , cạnh bằng 1. Gọi I là điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng BC nhưng I khác B và C . Đường thẳng AI cắt CD tại E .

Đường thẳng OI cắt BE tại F . Gọi AH là đường cao trong tam giác AMN

- 1) Chứng minh tứ giác $ABNH$ nội tiếp
- 2) Chứng minh CF vuông góc với BE
- 3) Điểm M, N lần lượt thuộc đoạn thẳng CD, BC sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Đặt $DM = x, BN = y$. Tính diện tích S của tam giác MAN theo x, y . Tìm giá trị nhỏ nhất của S

Câu 5. (1,5 điểm)

- 1) Giả sử $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$
 - a) Tìm $x_1^2 + x_2^2$ theo a, b
 - b) Tìm một phương trình bậc hai nhận x_1^3 và x_2^3 làm nghiệm
- 2) Tìm hai số nguyên tố p, q sao cho $p+q$ và $p-q$ đều là số nguyên tố

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

3. Tìm điều kiện của x để biểu thức $A = \sqrt{2x-1}$ có nghĩa. Tính giá trị của A khi $x = 5 - 2\sqrt{5}$

Biểu thức A có nghĩa khi và chỉ khi $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Khi $x = 5 - 2\sqrt{5}$ (tmdk), ta có : $A = \sqrt{10 - 4\sqrt{5} - 1} = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt{5} - 2$

4. Tìm a để giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \frac{1}{x - \sqrt{x} + a}$ (với $x > 0$) bằng 2022

Ta có : $y = x - \sqrt{x} + a = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + a + \frac{3}{4} \geq a + \frac{3}{4}$

$$y = a + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y_{\min} = \left(a + \frac{3}{4}\right)_{\min}$$

$$\text{Vậy } B_{\max} = 2022 \Leftrightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2022} \Leftrightarrow a = -\frac{3031}{4044}$$

Câu 2. (3,0 điểm)

4. Giải phương trình $(2x+3)^4 - 14(2x+3)^2 + 45 = 0$

Đặt $t = 2x+3$. Điều kiện : $t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành :

$$t^2 - 14t + 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \Rightarrow (2x+3)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \end{cases} \\ t = 5 \Rightarrow (2x+3)^2 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{\pm\sqrt{5}-3}{2} \end{cases}$$

5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Ta có :

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \\ (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \\ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} (tm)$$

6. Giải phương trình $2(4x-7)\sqrt{x-2} = (2+\sqrt{x-3})(x+4\sqrt{x-3}+2)$

Điều kiện $x \geq 3$. Ta có :

$$(8x-14)\sqrt{x-2} = (2+\sqrt{x-3})(x+4\sqrt{x-3}+2) \\ \Leftrightarrow [8(x-2)+2]\sqrt{x-2} = (2+\sqrt{x-3})[(\sqrt{x-3})^2 + 4\sqrt{x-3}+5]$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-2} \geq 0 \\ b = \sqrt{x-3} \geq 0 \end{cases}$. Viết lại phương trình đã cho dưới dạng :

$$\begin{aligned} 8a^3 + 2a &= (2+b)(b^2 + 4b + 5) \Leftrightarrow (2a)^3 + 2a = (2+b)[(2+b)^2 + 1] \\ \Leftrightarrow (2a)^3 + 2a &= (2+b)^3 + 2+b \\ \Leftrightarrow (2a-2-b)[4a^2 + 2a(2+b) + (2+b)^2 + 1] &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2-b=0 \\ 4a^2 + 2a(2+b) + (2+b)^2 + 1=0(VN) \end{cases} \\ \Rightarrow 2a &= 2+b \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = 2+\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 4(x-2) = 4+x-3+4\sqrt{x-3} \\ \Leftrightarrow 3(x-3) - 4\sqrt{x-3} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3}=0 \\ \sqrt{x-3}=\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{43}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

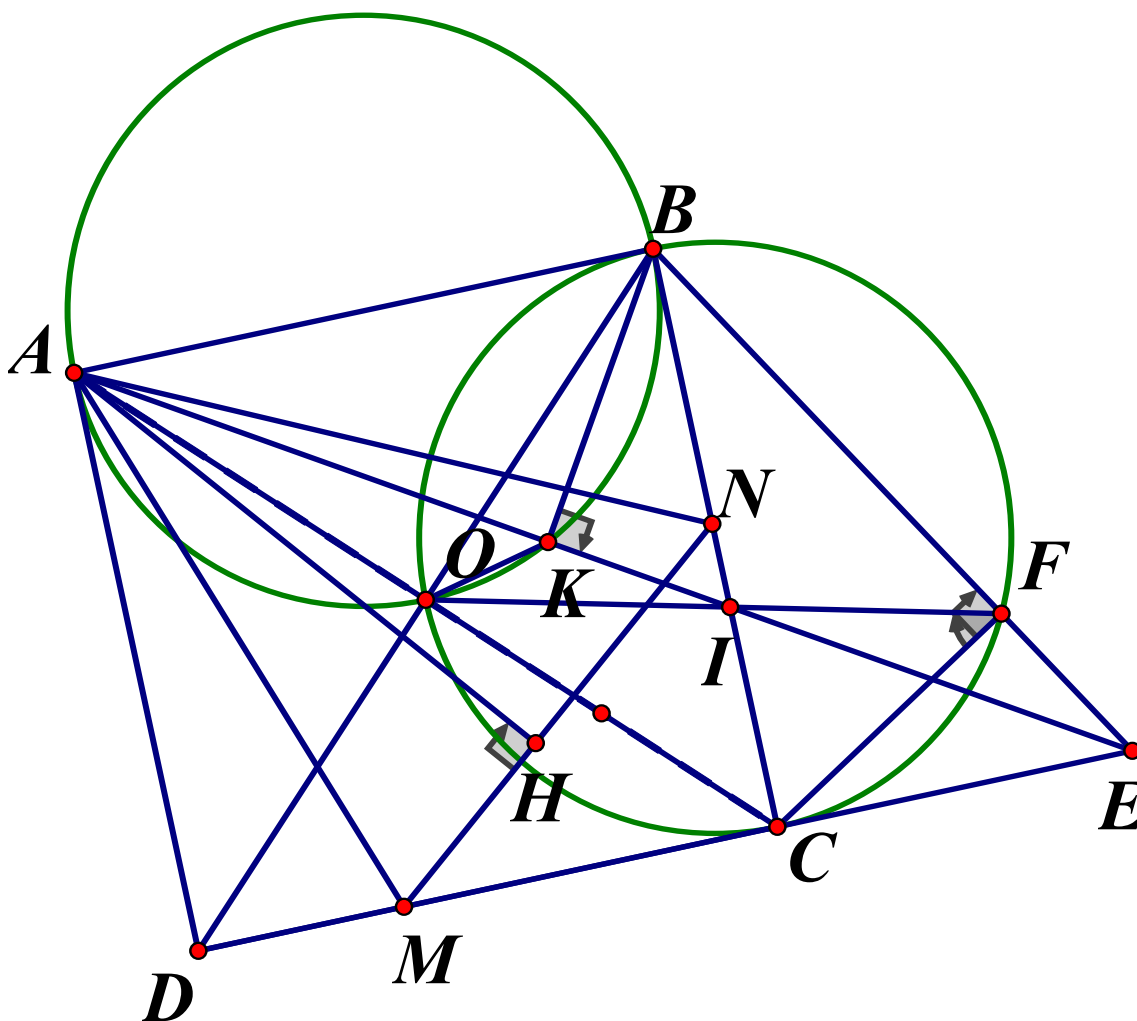
Câu 3. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là (P) . Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị (P) và có hoành độ lần lượt là $x_A = -1; x_B = 3$.

Tìm a, b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B

$$x_A = -1 \Rightarrow y_A = 1; \quad x_B = 3; y_B = 9$$

Ta có hệ $\begin{cases} -a+b=1 \\ 3a+b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

Câu 4. (2,5 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O , cạnh bằng 1. Gọi I là điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng BC nhưng I khác B và C . Đường thẳng AI cắt CD tại E . Đường thẳng OI cắt BE tại F . Gọi AH là đường cao trong tam giác AMN



4) Chứng minh tứ giác $ABNH$ nội tiếp

Ta có $\angle ABN = 90^\circ$ và $\angle NHA = 90^\circ$ nên $\angle ABN + \angle NHA = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $ABNH$ nội tiếp

5) Chứng minh CF vuông góc với BE

Kẻ $BK \perp AE$, với $K \in AE$

Vì $\angle OAB = 45^\circ$ nên $\angle OKB = 135^\circ$, mà $\angle BKA = 90^\circ$ nên $\angle AKO = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle OKF = 135^\circ$, do đó $\angle OCI = 45^\circ$. Suy ra $\angle OKI + \angle OCI = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $OLIC$ nội tiếp (I)

Do $\angle BKE = \angle BCE = 90^\circ$ nên tứ giác $CKBE$ nội tiếp (II)

Từ (I) và (II) ta có $\angle CBF = \angle CBE = \angle CKE = \angle CKI = \angle COI = \angle COF$

$\Rightarrow \angle CBF = \angle COF$. Suy ra tứ giác $CEFB$ nội tiếp

Suy ra $\angle BOC + \angle BFC = 180^\circ$ mà $\angle BOC = 90^\circ$ nên $\angle CFB = 90^\circ$. Vậy $CF \perp BE$

6) Điểm M, N lần lượt thuộc đoạn thẳng CD, BC sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Đặt $DM = x, BN = y$. Tính diện tích S của tam giác MAN theo x, y . Tìm giá trị nhỏ nhất của S

Theo đề bài, ta có $AM = \sqrt{y^2 + 1}; AN = \sqrt{x^2 + 1}$

$$\sin 45^\circ = \frac{NH}{AN} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow NH = \frac{\sqrt{2}}{2} AN = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2 + 1}. \text{ Khi đó, ta có :}$$

$$S = S_{AMN} = \frac{1}{2} NH \cdot AM = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{y^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} xy \Leftrightarrow 1 = x^2 + y^2 + 4xy - x^2 y^2 \geq xy - x^2 y^2 + 4xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 y^2 - 6xy + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (xy - 3 - 2\sqrt{2})(xy - 3 + 2\sqrt{2}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy \geq 3 + 2\sqrt{2} \text{ (ktm do } 0 \leq x, y \leq 1) \\ xy \leq 3 - 2\sqrt{2} \text{ (tm)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\min} \Leftrightarrow xy_{\max} \Leftrightarrow x = y; xy = 3 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{Do đó } S_{\min} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2} - 1$$

Câu 5. (1,5 điểm)

3) Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$

c) Tìm $x_1^2 + x_2^2$ theo a, b

$$\text{Ta có: } x_1 + x_2 = -a, x_1 x_2 = b \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2b$$

d) Tìm một phương trình bậc hai nhận x_1^3 và x_2^3 làm nghiệm

Ta có :

$$x_1^3 x_2^3 = (x_1 x_2)^3 = b^3 \text{ và } x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -a^3 - 3b(-a) = 3ab - a^3$$

$$\text{Phương trình bậc hai cần tìm là } x^2 + (a^3 - 3ab)x + b^3 = 0$$

4) Tìm hai số nguyên tố p, q sao cho $p + q$ và $p - q$ đều là số nguyên tố

Do p, q là số nguyên tố, $p + q, p - q$ cũng là số nguyên tố nên $q = 2 \Rightarrow p \geq 5$

Nếu $p = 5$ thì $p - 2 = 3; p + 2 = 7$ đều là số nguyên tố

Nếu $p > 5$ thì p là số lẻ nên $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$, với k là số nguyên dương

+ Với $p = 3k + 1$, ta có : $p + 2 = 3k + 1 + 2 = 3(k + 1)$ không là số nguyên tố

+ Với $p = 3k + 2$, ta có : $p - 2 = 3k + 2 - 2 = 3k$ không là số nguyên tố

Vậy $p = 5; q = 2$