

Bài 1 (2,0 điểm). Cho biểu thức $A = \frac{2}{\sqrt{x+4}} + \frac{2}{\sqrt{x-4}} - \frac{x}{x-16}$. Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa và rút gọn A .

Bài 2 (2,0 điểm) Trên một khúc sông xuôi dòng từ bến A đến bến B dài 80km, một chiếc thuyền đi xuôi dòng từ bến A đến bến B rồi sau đó đi ngược dòng đến bến A mất tất cả 9 giờ. Biết rằng thời gian chiếc thuyền ngược dòng trên khúc sông này nhiều hơn xuôi dòng 1 giờ. Tính vận tốc của dòng nước.

Bài 3 (2,0 điểm) Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC . Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC . Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Bài 4 (2,0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $y^2 + 3y = x^4 + x^2 + 18$.

Bài 5 (1,0 điểm) Cho các số thực dương $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = \frac{1}{8}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xy + yz + zx} - \frac{1}{x + y + z} \leq \frac{2}{3}.$$

Bài 6 (1,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và các đường cao AD, BE, CF . Gọi I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc H trên EF và ED . Hai đường thẳng IK và AD cắt nhau tại M . Hai đường thẳng FM và DE cắt nhau tại N . Gọi S là điểm đối xứng của B qua D . Chứng minh rằng ba điểm A, N, S thẳng hàng.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1

1) Điều kiện để biểu thức A có nghĩa là:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} + 4 \neq 0 \\ \sqrt{x} - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 16 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{2}{\sqrt{x} + 4} + \frac{2}{\sqrt{x} - 4} - \frac{x}{x - 16} = \frac{2(\sqrt{x} - 4) + 2(\sqrt{x} + 4) - x}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)} \\ &= \frac{4\sqrt{x} - x}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)} = \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x} - 4)}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)} = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} \end{aligned}$$

Bài 2

Cách 1. Thời gian ca nô đi xuôi dòng từ A đến B mất: $(9 - 1) : 2 = 4$ (giờ).

Thời gian ca nô đi ngược dòng từ B về A mất: $4 + 1 = 5$ (giờ).

Vận tốc của ca nô khi đi xuôi dòng là: $80 : 4 = 20\text{km/h}$.

Vận tốc của ca nô khi đi ngược dòng là: $80 : 5 = 16\text{km/h}$.

Vận tốc của dòng nước là: $(20 - 16) : 2 = 2\text{km/h}$.

Cách 2. Gọi x (km/h) là vận tốc riêng của ca nô và y (km/h) là vận tốc của dòng nước.

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $x + y$ (km/h).

Vận tốc của ca nô khi ngược dòng là $x - y$ (km/h).

Thời gian ca nô đi xuôi dòng từ A đến B là: $\frac{80}{x + y}$ (giờ).

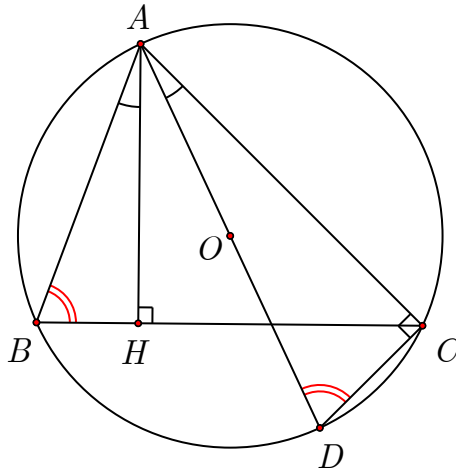
Thời gian ca nô đi ngược dòng từ B về A là: $\frac{80}{x - y}$ (giờ).

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} \frac{80}{x - y} + \frac{80}{x + y} = 9 \\ \frac{80}{x - y} - \frac{80}{x + y} = 1 \end{cases} . \text{ Đặt } \begin{cases} a = \frac{80}{x - y} \\ b = \frac{80}{x + y} \end{cases}, \text{ ta được hệ:}$$

$$\begin{cases} a + b = 9 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{80}{x - y} = 5 \\ \frac{80}{x + y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 16 \\ x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 2 \end{cases} .$$

Vậy vận tốc của dòng nước là 2km/h .

Bài 3 Chứng minh rằng $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$:



Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) , có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Ta có $\widehat{ABH} = \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AC}$

Mà $\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ$. (do $\triangle ABH$ vuông tại H)

và $\widehat{ADC} + \widehat{CAD} = 90^\circ$. (do $\triangle ADC$ vuông tại C)

Vậy $\widehat{ABH} = \widehat{CAD}$. Hay $\widehat{ABH} = \widehat{CAO}$.

Bài 4 Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $y^2 + 3y = x^4 + x^2 + 18$:

Ta có: $y^2 + 3y = x^4 + x^2 + 18$

$$\Leftrightarrow (y+2)^2 - y = (x^2+1)^2 - x^2 + 21.$$

$$\Leftrightarrow (y+2)^2 - (x^2+1)^2 + x^2 - y = 21.$$

$$\Leftrightarrow (y-x^2+1)(y+x^2+3) - (y-x^2+1) = 20.$$

$$\Leftrightarrow (y-x^2+1)(y+x^2+2) = 20.$$

Vì $y-x^2+1 < y+x^2+2$ nên ta có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} y-x^2+1=1 \\ y+x^2+2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ y=9 \end{cases} \quad \text{TH2: } \begin{cases} y-x^2+1=2 \\ y+x^2+2=10 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm nguyên})$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} y-x^2+1=4 \\ y+x^2+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \quad \text{TH4: } \begin{cases} y-x^2+1=-20 \\ y+x^2+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ y=-12 \end{cases}$$

$$\text{TH5: } \begin{cases} y-x^2+1=-10 \\ y+x^2+2=-2 \end{cases} \cdot (\text{vô nghiệm nguyên}) \quad \text{TH6: } \begin{cases} y-x^2+1=-5 \\ y+x^2+2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-6 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 6 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình đã cho là:

$(3; 9), (-3; 9), (0; 3), (3; -12), (-3; -12), (0; -6)$

Bài 5 Đặt: $P = \frac{1}{xy + yz + zx} - \frac{1}{x + y + z}$.

Ta có: $x + y + z = 8xyz(x + y + z) = 8(xy \cdot zx + xy \cdot yz + yz \cdot zx) \leq \frac{8(xy + yz + zx)^2}{3}$.

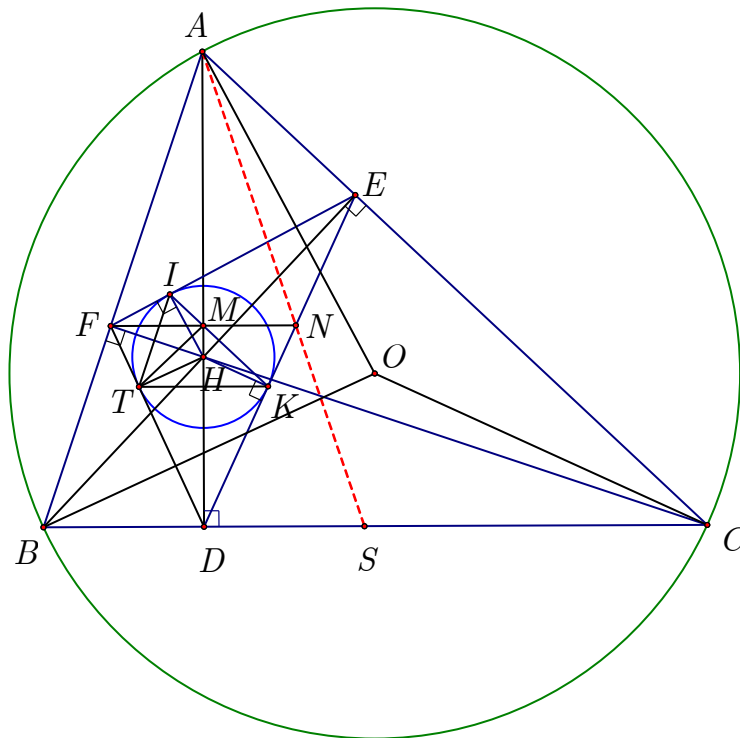
$$\Rightarrow \frac{1}{x + y + z} \geq \frac{3}{8(xy + yz + zx)^2}.$$

$\Rightarrow P \leq \frac{1}{xy + yz + zx} - \frac{3}{8(xy + yz + zx)^2}$. Đặt $t = \frac{1}{xy + yz + zx}$. Ta được:

$$P \leq -\frac{3}{8}t^2 + t = -\frac{3}{8}\left(t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{16}{9}\right) + \frac{2}{3} = -\frac{3}{8}\left(t - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} xy + yz + zx = \frac{4}{3} \\ xy = yz = zx \\ xyz = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}.$

Bài 6



+ Ta có hai điểm E, F cùng nhìn đoạn BC dưới một góc vuông nên chúng thuộc đường tròn đường kính BC . Do đó $\widehat{FEB} = \widehat{FCB}$ (1)

Mà $\widehat{FCB} = \widehat{BAD}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) (2)

Tương tự, hai điểm D, E cùng nhìn đoạn AB dưới một góc vuông nên chúng thuộc đường tròn đường kính AB . Do đó $\widehat{RAD} = \widehat{RED}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{FEB} = \widehat{BED}$. Do đó BE là phân giác của $\widehat{DEF}$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có AD, CF lần lượt là các phân giác của $\widehat{EDF}$ và $\widehat{EDF}$.

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$. (phần này đã học rồi)

+ Gọi T là hình chiếu của H trên DF . Ta có I, K, T lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$ với các cạnh EF, ED và DF .

+ Ta có AD là đường trung trực của đoạn TK mà $H, M \in AD$ nên $MT = MK, HT = HK \Rightarrow \triangle MHT = \triangle MHK$ (c-c-c)

$$\Rightarrow \widehat{MTH} = \widehat{MKH}$$

mà $\widehat{MKH} = \widehat{MIH}$ (do $\triangle HIK$ cân tại H)

Vậy $\widehat{MTH} = \widehat{MIH}$. Do đó tứ giác $MTIH$ nội tiếp.

Mà hai điểm I, T cùng nhìn đoạn FH dưới một góc vuông nên chúng thuộc đường tròn đường kính FH .

Vậy 5 điểm M, H, T, F, I cùng thuộc một đường tròn đường kính FH nên $MF \perp MH$.

+ Ta có DF, DE đối xứng nhau qua DA mà $FM \perp DA$ và FM cắt DE tại N nên F, N đối xứng nhau qua DA .

Ta lại có AB, AS đối xứng nhau qua DA mà $F \in AB$ nên $N \in AS$.

Vậy A, N, S thẳng hàng.