

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai

Bài 5 (6,0 điểm). Với đa thức $f \in \mathbb{R}[x]$, ký hiệu $f^2(x)$ thay cho $(f(x))^2$. Giả sử $P \in \mathbb{R}[x]$ khác hằng.

a) Chứng minh rằng nếu $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì tồn tại hai đa thức $A, B \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$P(x) = A^2(x) + B^2(x).$$

b) Chứng minh rằng nếu $P(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ thì tồn tại bốn đa thức $S, T, U, V \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$P(x) = S^2(x) + T^2(x) + xU^2(x) + xV^2(x).$$

Bài 6 (7,0 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến ME, MF đến đường tròn đó (E, F là các tiếp điểm). Tiếp tuyến của (O) tại điểm N thuộc cung lớn $\widehat{EF}$ cắt ME, MF lần lượt tại Q, P . Tia MO cắt các đường thẳng NE, NF lần lượt tại X, Y .

a) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại X, Y của đường tròn (NXY) và đường thẳng đi qua M vuông góc với PQ cùng đi qua một điểm.

b) Đường tròn tâm R đường kính XY cắt PQ tại các điểm S, T . Chứng minh rằng đường tròn (RST) tiếp xúc với hai đường tròn (MPQ) và (O) .

Bài 7 (7,0 điểm). Tìm tất cả các đa thức f hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên tố p ta có

$$f(p) \mid (p-1)! + 1.$$

----- **Hết** -----

Ghi chú: ➤ Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay!

➤ Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai

Bài 5 (6,0 điểm). Với đa thức $f \in \mathbb{R}[x]$, ký hiệu $f^2(x)$ thay cho $(f(x))^2$. Giả sử $P \in \mathbb{R}[x]$ khác hằng.

a) Chứng minh rằng nếu $P(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì tồn tại hai đa thức $A, B \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$P(x) = A^2(x) + B^2(x).$$

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 5 a) (3,0 điểm)	Rõ ràng P bậc chẵn và không có nghiệm thực. Không mất tính tổng quát ta giả sử P monic và $\deg P = 2k, k \in \mathbb{N}^*$.	1,0
	Áp dụng định lý phân tích ta có $P(x) = \prod_{i=1}^k (x^2 + a_i x + b_i)$ với $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.	
	Do $P(x)$ không có nghiệm thực nên $a_i^2 < 4b_i, \forall i = 1, 2, \dots, k$. Khi đó $P(x) = \prod_{i=1}^k \left[x + \frac{a_i}{2} + \left(\frac{\sqrt{4b_i - a_i^2}}{2} \right)^2 \right] \quad (1)$	1,0
	Lại có hằng đẳng thức: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.	1,0

Bài 5 (6,0 điểm). Với đa thức $f \in \mathbb{R}[x]$, ký hiệu $f^2(x)$ thay cho $(f(x))^2$. Giả sử $P \in \mathbb{R}[x]$ khác hằng.

b) Chứng minh rằng nếu $P(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ thì tồn tại bốn đa thức $S, T, U, V \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$P(x) = S^2(x) + T^2(x) + xU^2(x) + xV^2(x).$$

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 5 b) (3,0 điểm)	Không mất tính tổng quát giả sử P monic. Xét hai trường hợp sau: Trường hợp 1. $\deg P$ chẵn. Theo định lý phân tích, đa thức $P(x)$ được viết thành dạng sau $P(x) = \prod_{i=1}^k (x^2 + a_i x + b_i) \cdot \prod_{i=1}^l (x + c_i)^2 \cdot \prod_{i=1}^{2m} (x + d_i),$ với $a_i^2 - 4b_i < 0, \forall i = 1, k; d_i \neq d_j$ với $i \neq j$. Chú ý rằng, do $P(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ nên $d_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, 2m$.	1,0
	Đặt $\prod_{i=1}^{2m} (x + d_i) = x^{2m} + e_{2m-1}x^{2m-1} + \dots + e_1x + e_0$ ($e_i \geq 0, \forall i = 0, 1, \dots, 2m-1$), $A(x) = \prod_{i=1}^k (x^2 + a_i x + b_i) \cdot (x^{2m} + e_{2m-2}x^{2m-2} + \dots + e_2x^2 + e_0),$	1,0

	$B(x) = \prod_{i=1}^k (x^2 + a_i x + b_i) \cdot (e_{2m-1} x^{2m-2} + e_{2m-3} x^{2m-4} + \dots + e_3 x^2 + e_1).$ Ta có $P(x) = \prod_{i=1}^l (x + c_i)^2 [A(x) + xB(x)].$ Chú ý rằng $A(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $B(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên chứng minh tương tự câu a) ta suy ra tồn tại bốn đa thức $C, D, E, F \in \mathbb{R}[x]$ sao cho: $A(x) = C^2(x) + D^2(x) \text{ và } B(x) = E^2(x) + F^2(x).$ Đặt $S(x) = C(x) \cdot \prod_{i=1}^l (x + c_i)$, $T(x) = D(x) \cdot \prod_{i=1}^l (x + c_i)$ và $U(x) = E(x) \cdot \prod_{i=1}^l (x + c_i)$, $V(x) = F(x) \cdot \prod_{i=1}^l (x + c_i)$ Khi đó ta có: $P(x) = \prod_{i=1}^l (x + c_i)^2 [A(x) + xB(x)] = S^2(x) + T^2(x) + xU^2(x) + xV^2(x).$ Ta có điều phải chứng minh.	
	Trường hợp 2. $\deg P$ lẻ. Theo định lý phân tích, đa thức $P(x)$ được viết thành dạng sau $P(x) = \prod_{i=1}^k (x^2 + a_i x + b_i) \cdot \prod_{i=1}^l (x + c_i)^2 \cdot \prod_{i=1}^{2m+1} (x + d_i),$ với $a_i^2 - 4b_i < 0, \forall i = 1, k; d_i \neq d_j$ với $i \neq j$. Chú ý rằng, do $P(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ nên $d_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, 2m+1$. Đặt $\prod_{i=1}^{2m+1} (x + d_i) = x^{2m+1} + e_{2m} x^{2m} + e_{2m-1} x^{2m-1} + \dots + e_2 x^2 + e_1 x + e_0$ ($e_i \geq 0, \forall i = 0, 1, \dots, 2m$), $A(x) = \prod_{i=1}^k (x^2 + a_i x + b_i) \cdot (x^{2m} + e_{2m-1} x^{2m-2} + \dots + e_3 x^2 + e_1),$ $B(x) = \prod_{i=1}^k (x^2 + a_i x + b_i) \cdot (e_{2m} x^{2m} + e_{2m-2} x^{2m-2} + \dots + e_2 x^2 + e_0).$ Ta có $P(x) = \prod_{i=1}^l (x + c_i)^2 [xA(x) + B(x)].$ Đến đây tương tự Trường hợp 1 ta có điều phải chứng minh.	1,0

Bài 6 (7,0 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến ME, MF đến đường tròn đó (E, F là các tiếp điểm). Tiếp tuyến của (O) tại điểm N thuộc cung lớn $\widehat{EF}$ cắt ME, MF lần lượt tại Q, P . Tia MO cắt các đường thẳng NE, NF lần lượt tại X, Y .

Bài 6 (7,0 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến ME, MF đến đường tròn đó (E, F là các tiếp điểm). Tiếp tuyến của (O) tại điểm N thuộc cung lớn $\widehat{EF}$ cắt ME, MF lần lượt tại Q, P . Tia MO cắt các đường thẳng NE, NF lần lượt tại X, Y .

b) Đường tròn tâm R đường kính XY cắt PQ tại các điểm S, T . Chứng minh rằng đường tròn (RST) tiếp xúc với hai đường tròn (MPQ) và (O) .

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 6b) (3,0 điểm)	Ta có trung điểm R của XY nằm trên (MST) . Chú ý $RS = RT$ nên R chính là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{ST}$ của (MST) . Theo câu a) MS, MT đẳng giác trong tam giác MPQ nên (MST) tiếp xúc với (MPQ) .	1,0
	Gọi giao điểm của (MST) với MP, MQ lần lượt là P', Q' thì $PP'.PM = PS.PT = PX^2$. Suy ra $\widehat{MP'X} = 90^\circ$. Dẫn đến $\frac{MI}{MO} = \frac{MP'}{MP}$ với $I = MO \cap EF$. Do đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $MP'Q'$.	1,0
	Suy ra $MI.MI_a = MP'.MQ'$ trong đó I_a là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc M của tam giác $MP'Q'$. Vì vậy, qua phép nghịch đảo đối xứng tâm M , phương tích $MP'.MQ'$ thì $(MST) \equiv (MP'Q')$ biến thành $P'Q'$ và (O) biến thành (I_a) nên (MST) tiếp xúc (O) .	1,0

Bài 7 (7,0 điểm). Tìm tất cả các đa thức f hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên tố p ta có

$$f(p) \mid (p-1)! + 1.$$

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 7 (7,0 điểm)	Nếu f là hằng, chẳng hạn $f \equiv c$ thì ta có $c \mid 2$ và $c \mid 3$ nên $c = \pm 1$. Thử lại ta có $f \equiv 1$ và $f \equiv -1$ là các nghiệm của bài toán.	1,0
	Giả sử f khác hằng. Không mất tính tổng quát ta giả sử hệ số cao nhất của f dương (nếu không thay f bởi $-f$). Khi đó với số nguyên tố p đủ lớn thì $f(p) > 1$.	1,0
	Giả sử q là một ước nguyên tố của $f(p)$ và $q \neq p$. Theo Định lý Dirichlet về số nguyên tố, tồn tại vô hạn số nguyên tố r thỏa mãn $r \equiv p \pmod{q}$. Khi đó $f(r) \equiv f(p) \equiv 0 \pmod{q}$. Nghĩa là $q \mid f(r)$, và do đó $q \mid (r-1)! + 1$.	1,0
	Suy ra $q \geq r$ với vô hạn số nguyên tố r , vô lý. Như vậy nếu p là số nguyên tố đủ lớn thì $f(p)$ là lũy thừa của p .	1,0

Đặt $f(p) = p^{a_p}$, với a_p nguyên dương. Giả sử $d = \deg f$. Khi đó tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho $f(x) < cx^d, \forall x > 1$. Suy ra $p^{a_p} < cp^d$ với mọi số nguyên tố p đủ lớn. Vì vậy dãy số $\left(a_p\right)$ bị chặn. Suy ra tồn tại số nguyên dương a sao cho $f(p) = p^a$ với vô hạn số nguyên tố p . Do đó $f(x) = x^a$ với mọi x .	1,0
Thành thử ta có $p^a \mid (p-1)! + 1$ với mọi số nguyên tố p . Nói riêng ta có $2^a \mid 2$, nên $a = 1$. Vậy $f(x) = x$.	1,0
Rõ ràng theo Định lý Wilson, $f(x) = x$ thỏa mãn. Suy ra $f(x) = -x$ cũng là nghiệm của bài toán. Tóm lại, nghiệm của bài toán là $f \equiv 1, f \equiv -1, f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$.	1,0