

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2020 - 2021**

Môn: **Toán** – Lớp: 9

Thời gian làm bài: 150 phút

(Đề thi gồm: 01 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho biểu thức : $P = \frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2-1}}$, khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $P = 1$ khi $2 \leq x < 3$.

B. $P = 1$ khi $x > 3$.

C. $P = -1$ khi $x > 3$.

D. $P = 1$ khi $x \neq 3$.

Câu 2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn đẳng thức: $(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1$. Giá trị của biểu thức $A = x^3 + y^3$ bằng:

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hai đường thẳng $(d): y = (m^2 - 1)x + 4$ và $(d'): y = 3x + m + 2$ song song với nhau?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. Vô số.

Câu 4. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho $M(x; y)$ với x, y thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 1 + 10m \\ x - y = 5 + 11m \end{cases}$$

Tìm giá trị của m để điểm $M \in (d): y = x + 1$.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = -\frac{3}{2}$.

C. $m = \frac{3}{11}$.

D. $m = -\frac{6}{11}$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị của m để hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn đẳng thức $x = y(2 - y)$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 6. Cho Parabol $(P): y = -\frac{1}{4}x^2$ và điểm $I(0; -1)$. Biết đường thẳng (d) qua I với hệ số góc luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Độ dài nhỏ nhất của AB là :

A. 4.

B. $3\sqrt{3}$.

C. $4\sqrt{2}$.

D. $3\sqrt{2}$.

Câu 7. Cho phương trình: $\frac{x^3 + 2x + 7}{x^3 + 2x + 3} = x^2 + 2x + 1$. Gọi S là tích tất cả các nghiệm của phương trình. Giá trị của S là :

- A. -2 . B. 2 . C. 1 . D. -1 .

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị của tham số a khác 0 để một trong các nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 4a = 0$ gấp đôi một trong các nghiệm của phương trình $x^2 - x - 4a = 0$?

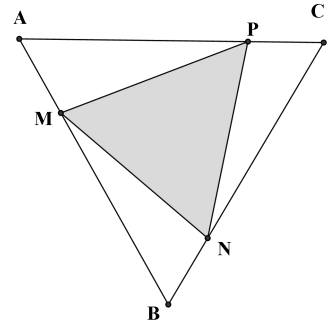
- A. 0 . B. 2 . C. 1 . D. 3 .

Câu 9. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Các tia phân giác của các góc $\widehat{AMB}$, $\widehat{AMC}$ cắt các cạnh AB , AC theo thứ tự tại D và E . Biết $BC = 8\text{cm}$, $AM = 6\text{cm}$. Độ dài đoạn thẳng DE bằng

- A. 5cm . B. $4,5\text{cm}$. C. $5,2\text{cm}$. D. $4,8\text{cm}$.

Câu 10. Cho tam giác ABC đều cạnh $4a$. Gọi M , N , P là các điểm di động trên các cạnh AB , AC , CA sao cho $AM = BN = CP$ (như hình vẽ bên). Giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MNP là

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. B. $2a^2\sqrt{3}$.
C. $a^2\sqrt{3}$. D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.



Câu 11. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 48cm^3 . Gọi E , E' lần lượt là trung điểm của các cạnh CD , $C'D'$. Thể tích của lăng trụ $ABE.A'B'E'$ bằng:

- A. 12cm^3 . B. 24cm^3 . C. 36cm^3 . D. 16cm^3 .

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC , CD . Giá trị của $\cos \widehat{AMN}$ là:

- A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi I là điểm nằm trong hình vuông sao cho $\widehat{ABI} = \widehat{BAI} = 15^\circ$. Giá trị của $IC + ID$ bằng:

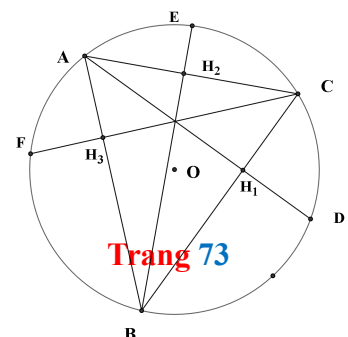
- A. $\frac{7a}{3}$. B. $\frac{5a}{3}$. C. $\frac{5a}{2}$. D. $2a$.

Câu 14. Cho tam giác ABC vuông tại A , gọi r , R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC . Biết $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$. Tỉ số $\frac{r}{R}$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AH_1 , BH_2 , CH_3 cắt đường tròn (O) theo thứ tự ở D

E , F . Tính $\frac{AD}{AH_1} + \frac{BE}{BH_2} + \frac{CF}{CH_3}$. Ta được kết quả là:



A. $\frac{9}{2}$.

B. 4.

C. $\frac{13}{3}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Câu 16. Từ danh sách giới thiệu giáo viên tham gia làm đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 môn Toán, trong đó có 6 giáo viên nam và 4 giáo viên nữ, thầy Hồng phụ trách muốn chọn 3 giáo viên tham gia làm đề thi. Có bao nhiêu cách chọn nếu trong 3 giáo viên đó có ít nhất một giáo viên nữ?

A. 100.

B. 21.

C. 19.

D. 52.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1. (3,0 điểm).

a) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $(x + y - 3)^2 + (y - 2)^2 = y - 2$

b) Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2021 sao cho $n^2 + 2021$ chia hết cho 30

Câu 2. (3,5 điểm).

a) Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình: $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$. Đặt

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$$

Chứng minh rằng S_n là số nguyên với mọi n nguyên dương.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+2}(x+3) = \sqrt{y} \left[\sqrt{y(x+2)} + 1 \right] \\ x^2 + (y+1)(2x-y+5) = x+16 \end{cases}$$

Câu 3. (4,0 điểm). Cho đường tròn (O) và một dây cung BC cố định không là đường kính. Xét điểm A thay đổi trên (O) sao cho A không trùng với B, C . Gọi H là trực tâm tam giác ABC , I là trung điểm BC .

a) Chứng minh rằng $AH = 2OI$

b) Gọi D là điểm đối xứng với A qua O , M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BC, BH, CH . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

c) Tìm vị trí của điểm A để $HA + HB + HC$ lớn nhất.

Câu 4. (1,5 điểm). Cho a, b, c là ba số nguyên dương thỏa mãn $a + b + c = 2021$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P(a, b, c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

-----HẾT-----

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

BẢNG ĐÁP ÁN PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8
B	C	A	D	B	A	D	C
Câu 9	Câu 10	Câu 11	Câu 12	Câu 13	Câu 14	Câu 15	Câu 16
D	C	B	A	D	B	B	A

🔍 HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT 🔍

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1.

a) Phương trình: $(x + y - 3)^2 + (y - 2)^2 - (y - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(y - 3)x + 2y^2 - 11y + 15 = 0 \quad (*)$$

Ta có: $\Delta_x = (y - 3)^2 - 2y^2 + 11y - 15 = -y^2 + 5y - 6$

Từ yêu cầu bài toán thì phương trình (*) phải có nghiệm x hay $\Delta_x \geq 0$

$$\text{Vậy } 0 - y^2 + 5y - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 3$$

$$\text{Mà } y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{2; 3\}$$

$$\text{Với } y = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Với } y = 3 \Rightarrow x = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm: $(x, y) \in \{(1; 2); (0; 3)\}$.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2021 sao cho $n^2 + 2021$ chia hết cho 30

$$\text{Ta có: } n^2 + 2021 = n^2 - n + (2021 + n)$$

Chứng minh được $n^2 - n$ chia hết cho 6.

Chứng minh được $n^2 - n$ chia hết cho 5

Từ đó ta có: $n^2 - n$ chia hết cho 30

$$\text{Do đó } (n^2 + 2021) : 30 \Leftrightarrow (2021 + n) : 30$$

$$\Leftrightarrow (2010 + 11 + n) : 30 \Leftrightarrow (n + 11) : 30$$

Do n là số tự nhiên không vượt quá 2021 nên $0 \leq n \leq 2021$

$$\Rightarrow \begin{cases} n + 11 : 30 \\ 11 \leq n + 11 \leq 2032 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n + 11 \in \{30; 60; \dots; 2010\}$$

$$\Rightarrow n \in \{19; 49; \dots; 1999\}$$

Như vậy ta có 67 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.

Câu 2.

a) Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình: $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$. Đặt

$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$. Chứng minh rằng S_n là số nguyên với mọi n nguyên dương.

Ta có: $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^3 - 2x - 2) = 0$

Giải phương trình $x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$ ta được ba nghiệm $x_1 = 1 - \sqrt{3}$; $x_2 = 1 + \sqrt{3}$; $x_3 = 2$

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n = (1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n + 2^n.$$

Để chứng minh S_n là số nguyên với mọi n nguyên dương ta đi chứng minh

$T_n = (1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n$ là số nguyên với mọi n nguyên dương.

Ta đi chứng minh $T_n \in \mathbb{Z}$, bằng quy nạp.

Ta có: $T_1 = (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) = 2$; $T_2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2 = 8$ tức là $T_1, T_2 \in \mathbb{Z}$

Giả sử $T_n \in \mathbb{Z}, \forall k \leq n+1$. Ta đi chứng minh $T_{n+2} \in \mathbb{Z}$, thật vậy:

$$\begin{aligned} T_{n+2} &= (1 + \sqrt{3})^{n+2} + (1 - \sqrt{3})^{n+2} \\ &= \left[(1 + \sqrt{3})^{n+1} + (1 - \sqrt{3})^{n+1} \right] \left[(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) \right] - \left[(1 + \sqrt{3})^{n+1}(1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})^{n+1}(1 + \sqrt{3}) \right] \\ &= \left[(1 + \sqrt{3})^{n+1} + (1 - \sqrt{3})^{n+1} \right] \left[(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) \right] - \left[(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n \right] (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) \\ &= 2T_{n+1} + 2T_n \end{aligned}$$

Vì $T_n, T_{n+1} \in \mathbb{Z}$ nên $T_{n+2} \in \mathbb{Z}$

Theo nguyên lý quy nạp $T_n \in \mathbb{Z}$ với mọi n nguyên dương. Vậy S_n là số nguyên với mọi n nguyên dương.

b) Điều kiện: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{x+2} = a$; $\sqrt{y} = b$; ($a, b \geq 0$)

Phương trình thứ nhất trở thành $a(a^2 + 1) = b(ab + 1)$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + 1) = 0 \Leftrightarrow a = b \text{ (vì } a^2 + ab + 1 > 0)$$

$$a = b \Rightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = x+2$$

Thay $y = x+2$ vào phương trình (2) ta được

$$2x^2 + 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $x = 1 \Rightarrow y = 3$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) = (1; 3)$.

Câu 3.

a) Chứng minh rằng $AH = 2OI$.

Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) , ta có

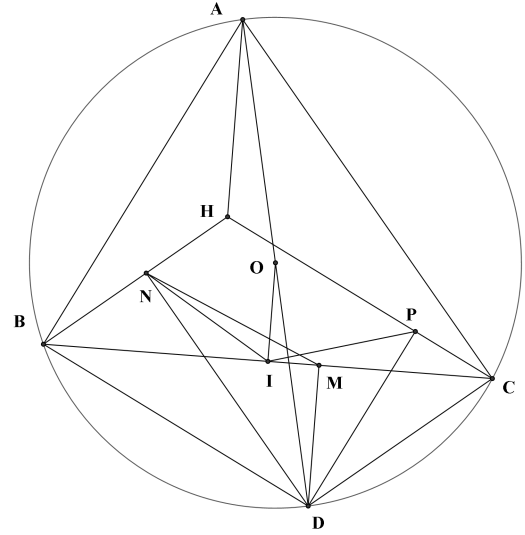
$\widehat{ACD} = 90^\circ$, mà $BH \perp AC$, suy ra $BH \parallel DC$

Tương tự, $CH \parallel DB$. Do đó tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Suy ra BC , HD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, hay I là trung điểm của HD .

Trong tam giác DAH ta có OI là đường trung bình nên $AH = 2OI$ (điều phải chứng minh).

b) Gọi D là điểm đối xứng với A qua O ; M , N , P lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên BC , BH , CH . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.



Tứ giác $HNPD$ nội tiếp đường tròn đường kính HD nên $\widehat{NIP} = 2\widehat{NDP} = 2(180^\circ - \widehat{BHC})$

Tứ giác $BNMD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD nên $\widehat{NMD} = 180^\circ - \widehat{NBD} = \widehat{BHC}$.

Tứ giác $CPMD$ nội tiếp đường tròn đường kính CD nên $\widehat{PMD} = 180^\circ - \widehat{PCD} = \widehat{BHC}$.

Từ đó ta có $\widehat{NMP} = 360^\circ - \widehat{NMD} - \widehat{PMD} = 360^\circ - 2\widehat{BHC}$

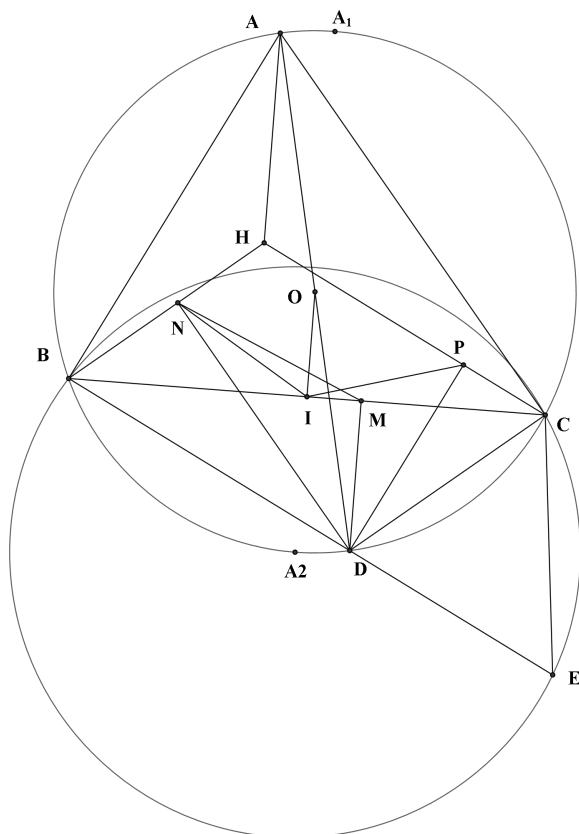
Như vậy $\widehat{NIP} = \widehat{NMP}$, suy ra tứ giác $NIMP$ nội tiếp được một đường tròn hay đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định I là trung điểm của BC (điều phải chứng minh).

c) Tìm vị trí điểm A để $HA + HB + HC$ lớn nhất.

Trên tia đối của tia DB lấy điểm E sao cho $DE = DC$

Ta có: $\widehat{BEC} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{CDE}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BAC})$

Trường hợp 1: A thuộc cung lớn BC



Vì $\angle BEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BAC})$ nên E thuộc cung tròn cố định dựng trên đoạn thẳng BC , nằm khác phía với A đối với đường thẳng BC .

Có $HA = 2OI$ không đổi, nên $HA + HB + HC$ lớn nhất khi và chỉ khi $HB + HC = BD + DC = BD + DE = BE$ lớn nhất BE lớn nhất khi và chỉ khi BE là đường kính của đường tròn chứa cung tròn đó.

Khi đó $DI \perp BC$, tương ứng cũng có $AI \perp BC$ tức là A là điểm chính giữa cung lớn BC . Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm chính giữa cung lớn BC và cung nhỏ BC .

Ta có: $HB + HC = \sqrt{BC^2 + (2A_2I)^2}$ khi $A \equiv A_1$ là điểm chính giữa cung lớn BC .

Trường hợp 2: A thuộc cung nhỏ BC

Ta có: $HB + HC = \sqrt{BC^2 + (2A_2I)^2}$ khi $A \equiv A_1$ là điểm chính giữa cung lớn BC .

Câu 4.

Vì chỉ có hữu hạn bộ số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1021$ nên tồn tại một bộ (a_0, b_0, c_0) nguyên dương để $P_0 = P(a_0, b_0, c_0)$ là giá trị nhỏ nhất của $P(a, b, c)$ không mất tính tổng quát.

Ta đi chứng minh $c_0 \leq a_0 + 1$.

Xét bộ $a_1 = a_0 + 1; b_1 = b_0; c_1 = c_0 - 1$.

Trang 79

$$P_1 = P(a_1, b_1, c_1) = \frac{a_1}{b_1 + c_1} + \frac{b_1}{c_1 + a_1} + \frac{c_1}{a_1 + b_1}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} P_1 - P_0 &= \frac{a_0 + 1}{b_0 + c_1 - 1} + \frac{c_0 - 1}{a_0 + 1 + b_0} - \frac{a_0}{b_0 + c_0} - \frac{c_0}{a_0 + b_0} \\ &= (a_0 + b_0 + c_0) \left[\frac{1}{(b_0 + c_0)(b_0 + c_0 - 1)} - \frac{1}{(a_0 + b_0)(a_0 + b_0 + 1)} \right] < 0 \end{aligned}$$

Điều này trái với cách chọn bộ (a_0, b_0, c_0)

Như vậy $a_0 \leq b_0 \leq c_0 \leq a_0 + 1$.

Kết hợp với điều kiện $a_0 + b_0 + c_0 = 2021$ ta được $(a_0, b_0, c_0) = (673, 674, 674)$

Từ đó ta có giá trị nhỏ nhất của $P(a, b, c)$ là $P_0 = \frac{673}{1348} + \frac{1348}{1347}$ đạt được khi một trong ba số a, b, c bằng 673, hai số còn lại bằng 674.