

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2023 - 2024**

Môn thi: Toán (Dành cho thí sinh chuyên Toán)

Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

- Rút gọn biểu thức: $P = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$
- Vẽ đường thẳng d là đồ thị của hàm số $y = 2x - 4$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d .

Câu 2. (2,0 điểm)

- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 6x + 6y = 2023|xy| \\ x - 2y = 3xy \end{cases}$$
- Giải phương trình: $2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}$

Câu 3. (3,0 điểm)

- Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , $AB < AC$, có các đường cao BE và CF . Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S . Gọi M là giao điểm của BC và SO .
 - Chứng minh rằng tam giác EAB đồng dạng với tam giác MBS , từ đó suy ra tam giác AEM đồng dạng với tam giác ABS .
 - Gọi N là giao điểm của AM và EF , P là giao điểm của SA và BC . Chứng minh rằng NP vuông góc với BC .
- Cho hình chữ nhật $ABCD$. Lấy các điểm E, F thuộc cạnh AB (E nằm giữa A, F); G, H thuộc cạnh BC (G nằm giữa B, H); I, J thuộc cạnh CD (I nằm giữa C, J); K, M thuộc cạnh DA (K nằm giữa D, M) sao cho E, F, G, H, I, J, K, M đôi một phân biệt và khác các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, đồng thời hình đa giác $EFGHIJKM$ có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình đa giác $EFGHIJKM$ là các số hữu tỉ (theo đơn vị cm) thì $EF = IJ$.

Câu 4. (1,5 điểm) Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 18(x + y + z)$.

- Chứng minh rằng $x + y + z$ chia hết cho 6.
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = xyz$.

Câu 5. (1,5 điểm)

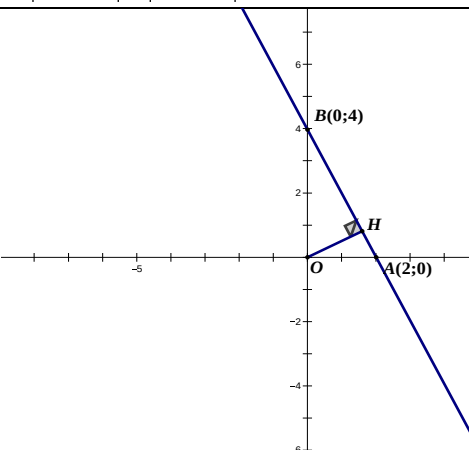
- Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{15}{ab + bc + ca} \geq 6 - abc$$
- Trên mặt phẳng cho 2008 điểm bất kì sao cho khoảng cách giữa hai điểm tùy ý luôn lớn hơn 1. Chứng minh rằng mỗi hình tròn có bán kính bằng 1 chỉ chứa không quá 5 điểm trong 2008 điểm đã cho.

SỔ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn thi: Toán (Dành cho thí sinh chuyên Toán)
(Hướng dẫn chấm có 5 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1. (2,0 điểm)		
1. Rút gọn biểu thức: $P = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ 2. Vẽ đường thẳng d là đồ thị của hàm số $y = 2x - 4$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d.		
	1. Ta có $P = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$	0,5
	$= \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}-1 = \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1 = 2$	0,5
	 2. Vẽ đường thẳng d là đồ thị của hàm số $y = 2x - 4$ Đường thẳng d cắt trục Ox tại $A(2; 0)$, cắt trục Oy tại $B(0; 4)$ Tính được $OA = 2$; $OB = 4$. Gọi H là hình chiếu của O trên AB. Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} \Rightarrow OH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ Vậy khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng d là $OH = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.	0,5
Câu 2. (2,0 điểm)		
1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x + 6y = 2023 xy \\ x - 2y = 3xy \end{cases}$ 2. Giải phương trình: $2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}$		
	1. Xét hệ phương trình $\begin{cases} 6x + 6y = 2023 xy \\ x - 2y = 3xy \end{cases}$ (1) Nếu $xy > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{y} + \frac{6}{x} = 2023 \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{2032}{9} \\ \frac{1}{x} = \frac{2005}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{2005} \\ y = \frac{9}{2032} \end{cases}$ (thỏa mãn $xy > 0$)	0,5

Nếu $xy < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{y} + \frac{6}{x} = -2023 \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = -\frac{2014}{9} \\ \frac{1}{x} = -\frac{2041}{18} \end{cases}$ (loại, vì không thỏa mãn $xy < 0$) Nếu $xy = 0$ thì từ (1) ta tính được $x = y = 0$ Vậy hệ phương trình (1) có đúng 2 nghiệm là $(0; 0)$ và $\left(\frac{18}{2005}; \frac{9}{2032}\right)$.	0,5
2. Giải phương trình: $2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}$ (2) ĐK: $x \geq -\frac{1}{4}$. Ta có (2) $\Leftrightarrow 2x + 3 + \sqrt{(x+2)(4x+1)} = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}$.	0,25
Đặt $t = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}$ (với $t \geq \sqrt{7}$) thì $t^2 = 8x + 4\sqrt{(x+2)(4x+1)} + 9$ hay $2x + \sqrt{(x+2)(4x+1)} = \frac{t^2 - 9}{4}$. Phương trình (2) trở thành $\frac{t^2 - 9}{4} + 3 = t$	0,25
$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$. Kết hợp với điều kiện $t \geq \sqrt{7}$ ta lấy $t = 3$	0,25
Với $t = 3$ thì $2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x + \sqrt{(x+2)(4x+1)} = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)(4x+1)} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ (x+2)(4x+1) = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{9}$ Vậy phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{9}$	0,25

Câu 3. (3,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$, có các đường cao BE và CF.

Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S. Gọi M là giao điểm của BC và SO.

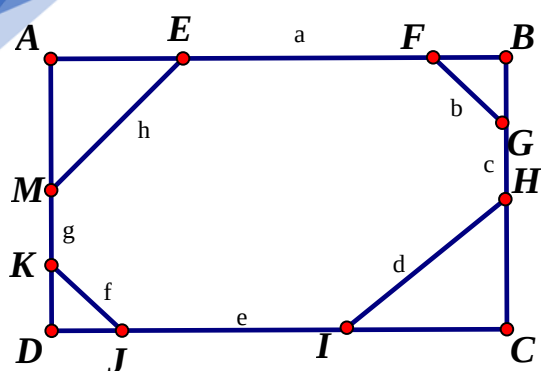
a. Chứng minh rằng tam giác EAB đồng dạng với tam giác MBS, từ đó suy ra tam giác AEM đồng dạng với tam giác ABS.

b. Gọi N là giao điểm của AM và EF, P là giao điểm của SA và BC. Chứng minh rằng NP vuông góc với BC.

2. Cho hình chữ nhật ABCD. Lấy các điểm E, F thuộc cạnh AB (E nằm giữa A, F); G, H thuộc cạnh BC (C nằm giữa B, H); I, J thuộc cạnh CD (I nằm giữa C, J); K, M thuộc cạnh DA (K nằm giữa D, M) sao cho E, F, G, H, I, J, K, M đôi một phân biệt và khác các đỉnh của hình chữ nhật ABCD, đồng thời hình đa giác EFGHIJKM có các góc bằng nhau. Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh của hình đa giác EFGHIJKM là các số hữu tỉ (theo đơn vị cm) thì $EF = IJ$.

1. Học sinh vẽ đúng hình để làm được ý a	0,25
a. Ta có $OS \perp BC$ tại trung điểm M của BC. Nên $\widehat{BEA} = \widehat{SMB} = 90^\circ$. Mà $\widehat{BAC} = \widehat{SBC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$. Suy ra $\triangle EAB$ đồng dạng $\triangle MBS$.	0,25

Hai tam giác EAB, MBS đồng dạng nên $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{BM}$. Tam giác BEC vuông tại E, EM là trung tuyến nên $BM = ME$. Suy ra $\frac{AB}{AE} = \frac{BS}{ME}$ (1)	0,25
	Tam giác MEC cân tại M, nên $\widehat{MEC} = \widehat{MCE}$. Mặt khác $\widehat{ABS} + \widehat{ACB} = 180^\circ = \widehat{AEM} + \widehat{MEC} = \widehat{AEM} + \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABS} = \widehat{AEM}$ (2). Từ (1), (2) suy ra hai tam giác AEM, ABS đồng dạng. b. Hai tam giác AEM, ABS đồng dạng nên $\widehat{BAP} = \widehat{EAN}$; $\widehat{AME} = \widehat{ASB}$ (3). Mà tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $\widehat{ABP} = \widehat{AEN}$. Suy ra hai tam giác AEN, ABP đồng dạng, dẫn tới $\frac{AN}{AP} = \frac{NE}{BP}$ (4)
Ta có: $\widehat{NEM} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{NEM} + \widehat{AEN} + \widehat{MEC} = 180^\circ$. Suy ra: $\widehat{NEM} = \widehat{BAC} = \widehat{SBP}$ (5) Từ (3) và (5) suy ra hai tam giác EMN, BSP đồng dạng. Do đó $\frac{NE}{BP} = \frac{MN}{PS}$ (6)	0,25
Từ (4) và (6) suy ra $\frac{AN}{AP} = \frac{NM}{PS} \Rightarrow \frac{AN}{MN} = \frac{AP}{PS} \Rightarrow NP \parallel MS$. Mà $SM \perp BC \Rightarrow NP \perp BC$.	0,5
2. Gọi $EF = a$; $FG = b$; $GH = c$; $HI = d$; $IJ = e$; $JK = f$; $KM = g$; $ME = h$ (theo đơn vị cm, với a, b, c, d, e, f, g, h là các số hữu tỉ dương). Do các góc của hình bát giác EFGHIJKM bằng nhau nên mỗi góc trong của hình bát giác đó có số đo là $\frac{(8-2).180^\circ}{8} = 135^\circ$.	0,25

	Suy ra mỗi góc ngoài của hình bát giác này là $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. Do đó các tam giác MAE; FBG; CIH; DKJ là các tam giác vuông cân.	0,25
Ta có: $MA = ME = \frac{h}{\sqrt{2}}$; $BF = BG = \frac{b}{\sqrt{2}}$; $CH = CI = \frac{d}{\sqrt{2}}$; $DK = DJ = \frac{f}{\sqrt{2}}$. Vì $AB = CD$ nên $\frac{h}{\sqrt{2}} + a + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{f}{\sqrt{2}} + e + \frac{d}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (e-a)\sqrt{2} = h+b-f-d$.		0,25
Nếu $e-a \neq 0$ thì $\sqrt{2} = \frac{h+b-f-d}{e-a}$, điều này vô lí, do $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, còn $\frac{h+b-f-d}{e-a}$, là số hữu tỉ. Vậy $e-a=0 \Leftrightarrow e=a$ hay $EF = IJ$ (đpcm)		0,25

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 18(x+y+z)$.

- Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 6.
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = xyz$.

1. Từ giả thiết ta có $(x^3 - x) + (y^3 - y) + (z^3 - z) = 17(x+y+z)$	0,25
Tích của ba số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 6 nên $x^3 - x = (x-1)x(x+1):6$ Tương tự $y^3 - y:6, z^3 - z:6 \Rightarrow 17(x+y+z):6$	0,25
Mà 17 và 6 nguyên tố cùng nhau nên $x+y+z:6$	0,25
2. Ta có $x+y+z=6m, x^3+y^3+z^3=108m$, với $m \in \mathbb{N}^*$. Vì $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ nên $\frac{108m}{3} \geq \left(\frac{6m}{3}\right)^3 \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{9}{2}$, suy ra $m \leq 2$	0,25
Lúc này $F = xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{12}{3}\right)^3 = 64$ (1) Từ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ suy ra $108m - 3F = 6m(36m^2 - 3(xy+yz+zx)) \Leftrightarrow F = 36m - 6m(12m^2 - (xy+yz+zx))$. Do đó $F:6$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $F \leq 60$ (3).	0,25
Đẳng thức ở (3) xảy ra, chẳng hạn khi $\begin{cases} x+y+z=12 \\ 60=72-12(48-(xy+yz+zx)) \\ xyz=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ xy+yz+zx=47 \\ xyz=60 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z) \text{ là hoán vị của } (3;4;5)$ Vậy giá trị lớn nhất của F là 60, đạt được chẳng hạn khi $(x;y;z)$ là hoán vị của $(3;4;5)$	0,25

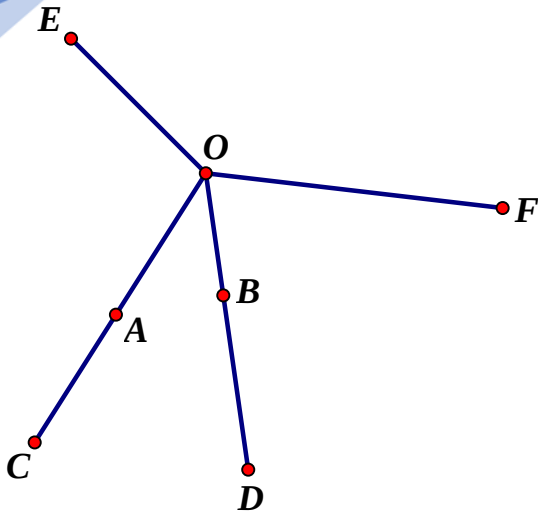
Câu 5. (1,5 điểm)

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{15}{ab + bc + ca} \geq 6 - abc$$

2. Trên mặt phẳng cho 2008 điểm bất kì sao cho khoảng cách giữa hai điểm tùy ý luôn lớn hơn 1. Chứng minh rằng mỗi hình tròn có bán kính bằng 1 chỉ chứa không quá 5 điểm trong 2008 điểm đã cho.

1. Ta sẽ chứng minh $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq abc$ (1). Nếu $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq 0$ thì (1) đúng		
Ta có $\left. \begin{aligned} (3-2a)(3-2b) &\leq \left(\frac{3-2a+3-2b}{2}\right)^2 = c^2 \\ (3-2a)(3-2c) &\leq \left(\frac{3-2a+3-2c}{2}\right)^2 = b^2 \\ (3-2c)(3-2b) &\leq \left(\frac{3-2c+3-2b}{2}\right)^2 = a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq abc .$ Dấu “=” ở (1) xảy ra khi $a = b = c = 1$.		0,25
Từ (1) ta có $27-9(2a+2b+2c)+3(4ab+4bc+4ca)-8abc \leq abc$ $\Leftrightarrow 27-9.6+12(ab+bc+ac)-8abc \leq abc$ (do $a+b+c=3$) $\Leftrightarrow abc \geq \frac{4}{3}(ab+bc+ca)-3$		0,25
Lúc này $abc + \frac{15}{ab+bc+ca} \geq \frac{4}{3}(ab+bc+ca) + \frac{12}{ab+bc+ca} + \frac{3}{ab+bc+ca} - 3$ $\geq 2\sqrt{\frac{4}{3}(ab+bc+ca)} \cdot \frac{12}{ab+bc+ca} + \frac{9}{(a+b+c)^2} - 3 = 8+1-3=6$ Suy ra $\frac{15}{ab+bc+ca} \geq 6-abc$ (đpcm). Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.		0,25
2. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại đường tròn tâm O bán kính bằng 1 có thể chứa được n điểm trong 2008 điểm đã cho, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$. Gọi 6 điểm trong số n điểm đó là A, B, M, N, E, F. TH1: Một điểm trong các điểm A, B, M, N, E, F trùng với O. Khi đó 5 điểm còn lại sẽ cách tâm O một khoảng bé hơn hoặc bằng 1, mâu thuẫn với giả thiết.		0,25
	TH2: Các điểm A, B, M, N, E, F không trùng tâm O. Khi đó vẽ các bán kính đi qua 6 điểm trên. Vì có 6 bán kính nên tồn tại 2 bán kính tạo thành một góc bé hơn hoặc bằng	0,25



60° . Giả sử 2 bán kính OC và OD lần lượt đi qua A và B, $\widehat{AOB} \leq 60^\circ$.

Ta có
 $\widehat{OBA} + \widehat{OAB} = 180^\circ - \widehat{AOB} \geq 120^\circ$.
 Suy ra một trong hai góc $\widehat{OBA}, \widehat{OAB}$ phải lớn hơn hoặc bằng 60° . Không mất tính tổng quát giả sử $\widehat{OBA} \geq 60^\circ$, suy ra

0,25

$AB \leq OA \leq OC = 1$, mâu thuẫn với giả thiết. Từ hai trường hợp trên chứng tỏ không tồn tại hình tròn tâm O bán kính bằng 1 chứa được nhiều hơn 5 điểm trong số 2008 điểm đã cho. Vậy mỗi hình tròn có bán kính bằng 1 chỉ chứa không quá 5 điểm trong 2008 điểm đã cho.