

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} \right) : \left(\frac{a^2 + a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right) \left(\begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \right)$

- 1) Rút gọn biểu thức P
- 2) Tìm tất cả các giá trị của a để $P > 2$

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m - 1, m$ là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol (P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 1$
2. Giải phương trình: $\frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x + 10}} + 2 = \sqrt{x^2 + x + 4}$
3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2y = 0 \\ (2x - y^2)^2 + 4 - 2y = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Trên tia đối của tia BA lấy điểm M khác B . Kẻ BH vuông góc với CM ($H \in CM$). Gọi K là giao điểm của OH với BC

- 1) Chứng minh tứ giác $BHCO$ nội tiếp, HO là tia phân giác của $\angle BHC$
- 2) Chứng minh $BK \cdot BH = CK \cdot MH$
- 3) Gọi I là trung điểm của cạnh AD , tia BI cắt đường tròn (O) tại E . Tính độ dài đoạn thẳng DE theo R
- 4) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM cắt đường tròn (O) tại N (N khác B). Chứng minh ba điểm M, N, K thẳng hàng

Câu 4. (1,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + 2n + 8$ là số chính phương
2. Cho biểu thức $P = ab(a+b) + 2$, với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu giá trị của biểu thức P chia hết cho 3 thì $a - b$ chia hết cho 3

Câu 5. (1,0 điểm)

1. Cho các số thực a, b, c dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

2. Cho 25 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một lục giác đều cạnh $6cm$. Chứng minh rằng có ít nhất hai trong số các điểm đã cho có khoảng cách không vượt quá $3cm$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1) Với $a > 0, a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2 + 4\sqrt{a}(a-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right) : \left(\frac{a\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}+1} \right) \\ &= \frac{a+2\sqrt{a}+1-a+2\sqrt{a}-1+4a\sqrt{a}-4\sqrt{a}}{a-1} : a\sqrt{a} \\ &= \frac{4a\sqrt{a}}{a-1} \cdot \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{4}{a-1} \end{aligned}$$

2) Tìm a để $P > 2$

$$P > 2 \Leftrightarrow \frac{4}{a-1} > 2 \Leftrightarrow \frac{2}{a-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{3-a}{a-1} > 0 \Leftrightarrow 1 < a < 3 \text{ (tmdk)}$$

Vậy $1 < a < 3$ thì $P > 2$

Câu 2.

1) Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 - 2x - m + 1 = 0 (*)$

(P) cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' = 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của $(*)$ khi đó x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Theo hệ

$$\text{thức Vi - et, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = \frac{1-m}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } |x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow 1 - 4 \cdot \frac{1-m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (tmdk)}$$

Vậy $m = 1$

2) Điều kiện xác định: $x \in \square$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + x + 4}, t > 0. \text{ Phương trình trở thành: } \frac{t^2 - 4}{\sqrt{t^2 + 6}} + 2 = t$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-2)(t+2)}{\sqrt{t^2 + 6}} - (t-2) = 0 \Leftrightarrow (t-2) \left(\frac{t+2}{\sqrt{t^2 + 6}} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ \sqrt{t^2 + 6} = t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \text{ (tmdk)} \end{cases}$$

$$*)t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + x + 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{15}{4} = 0(VN)$$

3) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2y = 0 & (1) \\ (2x - y^2)^2 + 4 - 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2x - y^2)^2 + x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (2x - y^2)^2 + (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy $x = 2, y = 2$

- 1) Theo giả thiết $BH \perp CM \Rightarrow \widehat{BHC} = 90^\circ$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{BOC} = 90^\circ$
Suy ra $\widehat{BHC} + \widehat{BOC} = 180^\circ \Rightarrow BHC O$ là tứ giác nội tiếp
- 2) Theo chứng minh ở phần a) ta có HK là phân giác của $\triangle HBC$ nên $\frac{BK}{CK} = \frac{BH}{CH}$ (1)

Mặt khác dễ thấy $\Delta HMB \sim \Delta HBC (g.g) \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{MH}{BH} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{BK}{CK} = \frac{MH}{BH} \Leftrightarrow BK.BH = CK.MH$

3) Ta có: $\Delta ABI \sim \Delta EDI (g.g) \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{ID}{IB} \Leftrightarrow DE = \frac{AB.ID}{IB}$

Xét ΔABD vuông cân có $BD = 2R$ nên $AD = AB = R\sqrt{2}$, $IA = ID = \frac{1}{2}AD = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông ABI ta có:

$$IB = \sqrt{AB^2 + AI^2} = \frac{R\sqrt{10}}{2}.$$

$$\text{Vậy } DE = \frac{R\sqrt{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R\sqrt{10}}{2}} = \frac{R\sqrt{10}}{5}$$

4. Ta chứng minh M, K, D thẳng hàng

Thật vậy, Gọi K' là giao điểm của MD và BC

Vì $BM \parallel CD$ nên theo định lý Ta – let ta có: $\frac{BK'}{CK'} = \frac{BM}{AD} = \frac{BM}{BC} \quad (3) \text{ (vì } AD = BC)$

Mà $\Delta HMB \sim \Delta HBC (g.g) \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{HB}{HC}$

Mặt khác theo chứng minh câu b) ta có: $\frac{HB}{HC} = \frac{BK}{CK} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BK}{CK} \quad (4)$

Từ (3), (4) ta có: $\frac{BK'}{CK'} = \frac{BK}{CK} \Rightarrow K' \equiv K$

Vậy M, K, D thẳng hàng (5)

*Ta chứng minh M, N, D thẳng hàng

Thật vậy

Vì $BH \perp MC$ nên đường tròn ngoại tiếp ΔBHM có đường kính $BM \Rightarrow \angle BNM = 90^\circ$

Vì BD là đường kính của đường tròn (O) nên $\angle BND = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Từ đó suy ra $\angle BNM + \angle BND = 180^\circ \Rightarrow M, N, D$ thẳng hàng (6)

Từ (5) và (6) suy ra K, N, M thẳng hàng

Câu 4.

1. Đặt $n^2 + 2n + 8 = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1)=7 \Leftrightarrow \begin{cases} k+n+1=7 \\ k-n-1=1 \end{cases} \text{ (do } k+n+1 > k-n-1 \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=4 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow A=16=4^2$$

Vậy $n=2$

2. Ta có $ab(a+b)+2$ chia hết cho 3, suy ra $ab(a+b)$ chia cho 3 dư 1

$\Rightarrow$ 2 số a, b không chia hết cho 3 và phải có cùng số dư khi chia cho 3

Giả sử a, b đều chia cho 3 dư 1 thì $ab(a+b)$ chia cho 3 dư 2 (trái giả thiết)

Nên a, b đều chia cho 3 dư 2. Vậy $(a-b):3$

Câu 5.

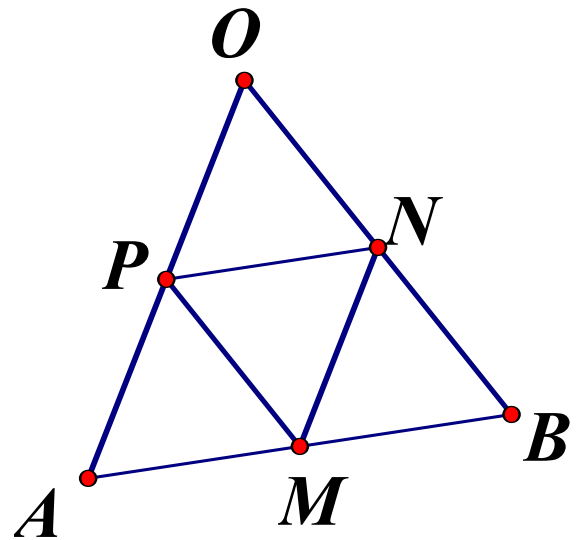
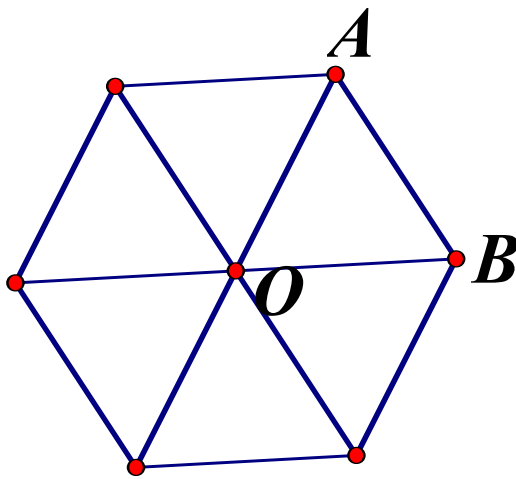
1) Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\left(\frac{2a}{a+b}\right)\left(\frac{2a}{a+c}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\frac{b}{2}}{b+c}\right)\left(\frac{2b}{b+a}\right)} + \sqrt{\left(\frac{2c}{c+a}\right)\left(\frac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{a+b} + \frac{2a}{a+c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{b}{2}}{b+c} + \frac{2b}{b+a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2c}{c+a} + \frac{\frac{c}{2}}{c+b}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+a}\right) + \left(\frac{2a}{a+c} + \frac{2c}{c+a}\right) + \left(\frac{\frac{b}{2}}{b+c} + \frac{\frac{c}{2}}{c+b}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(2+2+\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a}{a+b} = \frac{2a}{a+c} \\ \frac{\frac{b}{2}}{b+c} = \frac{2b}{b+a} \\ \frac{\frac{c}{2}}{c+b} = \frac{2c}{c+a} \end{cases} \Leftrightarrow a=7b=7c$$

$$\text{Vậy } \text{Max} P = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a=7b=7c$$

2) Giả sử 25 điểm đã cho nằm trong hoặc nằm trên cạnh của lục giác đều nội tiếp đường tròn (O)



+Nối O với 6 đỉnh của lục giác tạo thành 6 tam giác đều. Khi đó sẽ có ít nhất 5 điểm nằm trong hay trên cạnh của một tam giác đều trong số 6 tam giác đó (theo nguyên lý Dirichlet)

Giả sử 5 điểm trong 25 điểm đó cùng nằm trong hay nằm trên cạnh của tam giác đều OAB .

+Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, OB, OA . Khi đó 4 tam giác AMP, BMN, ONP, MNP là các tam giác đều cạnh bằng $3cm$

+Năm điểm nằm trong hay nằm trên cạnh của tam giác OAB sẽ có ít nhất hai điểm nằm trong một trong hay nằm trên cạnh của một trong 4 tam giác đều trong số 4 tam giác trên (theo nguyên lý Dirichlet). Khoảng cách giữa hai điểm đó không quá $3cm$