

Bài 1: (5 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) - f(x)f(y) = f(xy) - 2xy - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 2: (5 điểm)

Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số thực, có đúng 4 nghiệm dương phân biệt. Chứng minh rằng phương trình sau cũng có 4 nghiệm dương phân biệt:

$$\frac{1-3x}{x^4} \cdot P(x) + \left(1 - \frac{1-3x}{x^4}\right) \cdot P'(x) - P''(x) = 0.$$

Bài 3: (5 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , điểm D cố định trên cung BC không chứa A nhưng không phải là điểm chính giữa cung đó. Điểm P di động trên đoạn AD và $P \neq A, D$. Điểm Q đẳng giác với P trong tam giác ABC .

- Gọi G là giao điểm của DQ và BC . Chứng minh rằng $PG \parallel AQ$.
- Kẻ dây cung DE của đường tròn (O) vuông góc với BC , K là trung điểm DE , R là hình chiếu vuông góc của Q trên BC . Chứng minh rằng đường thẳng qua R và vuông góc với PK luôn đi qua một điểm cố định khi P di động trên AD .

Bài 4: (5 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương $n < 60$ sao cho tập hợp $M = \{n; n+1; n+2; \dots; 60\}$ có thể viết được thành hợp của các tập con đôi một rời nhau thỏa mãn tính chất: trong mỗi tập con có một phần tử bằng tổng tất cả các phần tử còn lại trong tập con đó.

————— **HẾT** —————

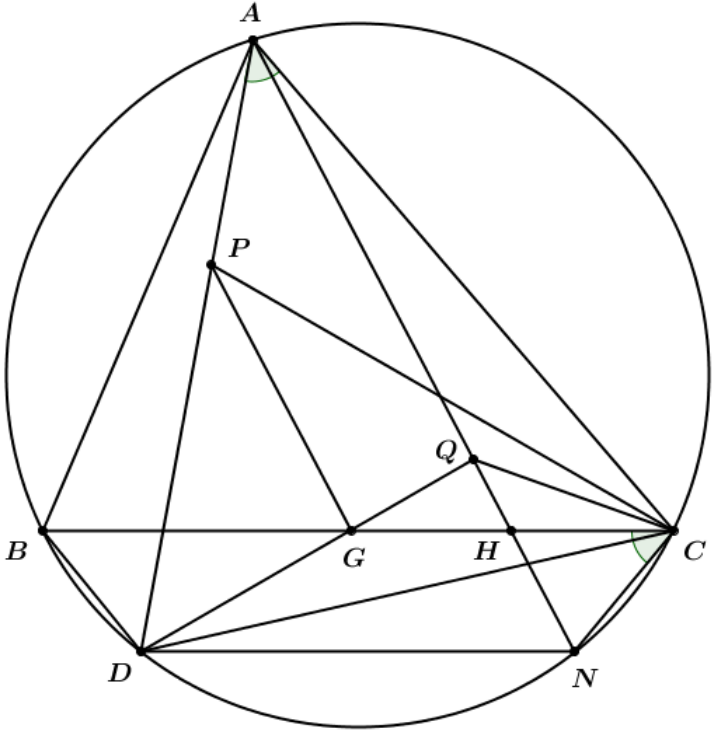
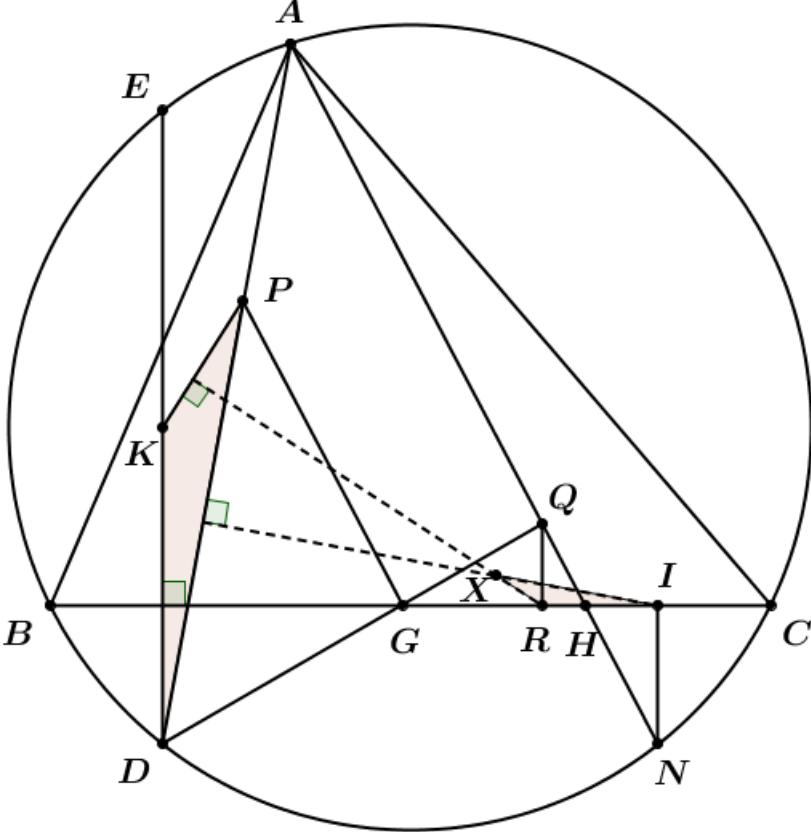
- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ ký của cán bộ coi thi 1:..... Chữ ký của cán bộ coi thi 2:.....

Bài	Sơ lược lời giải	Điểm
1(5,0đ)	$f(x+y) - f(x)f(y) = f(xy) - 2xy - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$ Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn đề bài. Ký hiệu $P(a; b)$ là thao tác thay x bởi a, y bởi b. $(1) : P(x; 0) \Rightarrow f(x) - f(x)f(0) = f(0) - 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}.$ Thử lại hàm $f(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$ không TM.	0.5
	Xét $f(0) = 1$: $(1) : P(1; -1) \Rightarrow f(0) - f(1)f(-1) = f(-1) + 1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}.$ Nếu $f(1) = -1$: $(1) : P(x; 1) \Rightarrow f(x+1) - f(x)f(1) = f(x) - 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(x+1) = -2x - 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = -2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Thử lại TM.}$	1
	Nếu $f(1) \neq -1, f(-1) = 0$: đặt $f(1) = a \neq -1$. $(1) : P(x; 1) \Rightarrow f(x+1) - f(x).a = f(x) - 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(x+1) = (a+1)f(x) - 2x - 1. \quad (2)$ $(1) : P(-x; -1) \Rightarrow f(-x-1) = f(x) - 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ thay vào (2) ta được $f(x+1) = f(-x-1) + a.(f(-x-1) + 2x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(x+1) = (1+a).f(-x-1) + a.(2x+1-1), \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(x) = (1+a).f(-x) + a.(2x-1), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$ $\Rightarrow \begin{cases} f(x) = (1+a).f(-x) + a.(2x-1), \forall x \in \mathbb{R} \\ (1+a)f(x) + a.(-2x-1) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ $\Rightarrow (a^2 + 2a)f(x) = 2a^2x + a^2 + 2a, \forall x \in \mathbb{R}.$	1
	$a = -2$ không thỏa mãn. $a \neq -2, a \neq 0 \Rightarrow f(x) = Ax + B, \forall x \in \mathbb{R}.$ $f(0) = 1, f(-1) = 0 \Rightarrow f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Thử lại TM.}$	1

Bài	Sơ lược lời giải	Điểm
	$a = 0$: từ (3) có $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. (1): $P(x; -y) : f(x - y) - f(x)f(y) = f(xy) + 2xy - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$, kết hợp (1) $\Rightarrow f(x + y) - f(x - y) = -4xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Cho $y = x$ ta được: $f(2x) - 1 = -4x^2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = -x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thỏa mãn.	1
	Vậy tất cả các hàm cần tìm là: $f(x) = -2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.	0.5
2(5,0đ)	Đặt $Q(x) = P(x) - P'(x)$. Biến đổi tương đương được phương trình: $\frac{1-3x}{x^4} \cdot (P(x) - P'(x)) + (P'(x) - P''(x)) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x^4} Q(x) + Q'(x) = 0$.	0.5
	Không mất tính tổng quát, giả sử $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ với $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \Rightarrow Q(x) = P(x) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} (x - x_i)(x - x_j)(x - x_k)$. $Q(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồng thời dễ thấy $Q(x_1) > 0, Q(x_2) < 0, Q(x_3) > 0, Q(x_4) < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} Q(x) = +\infty$	1.5
	$\Rightarrow Q(x)$ cũng có 4 nghiệm dương phân biệt $0 < y_1 < y_2 < y_3 < y_4$.	1
	Vì $x = 0$ không là nghiệm của $(1 - 3x)Q(x) + x^4 Q'(x) = 0$ nên $\frac{1-3x}{x^4} Q(x) + Q'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-3x)Q(x) + x^4 Q'(x) = 0$	1.5
	Đặt $R(x) = (1 - 3x)Q(x) + x^4 Q'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Dễ thấy $R(0) > 0, R(y_1) < 0, R(y_2) > 0, R(y_3) < 0, R(y_4) > 0$	
	$\Rightarrow R(x) = 0$ có 4 nghiệm dương phân biệt (đpcm).	0.5
3(5,0đ)	a. AQ cắt (O) tại $N \neq A$, cắt BC tại H. $\widehat{BAD} = \widehat{CAN} \Rightarrow BD = CN \Rightarrow DN \parallel BC$.	0.5
	$\widehat{HCN} = \widehat{BAN} = \widehat{CAD}, \widehat{HNC} = \widehat{CDA} \Rightarrow \triangle CHN \sim \triangle ACD$ $\Rightarrow HN.AD = CD.CN$. $\widehat{CDP} = \widehat{QNC}, \widehat{PCD} = \widehat{PCB} + \widehat{BCD} = \widehat{ACQ} + \widehat{NAC} = \widehat{CQN}$ $\Rightarrow \triangle CPD \sim \triangle QCN \Rightarrow CD.CN = QN.PD$.	1
	$\Rightarrow HN.AD = QN.PD \Rightarrow \frac{DP}{DA} = \frac{NH}{NQ} = \frac{DG}{DQ} \Rightarrow PG \parallel AN$.	1
	b. Kẻ $NI \perp BC$. Đường thẳng qua I và vuông góc với AD cắt đường thẳng qua R và vuông góc với PK tại X. Ta chứng minh X cố định.	0.5
	$\triangle DPK \sim \triangle IXR$ (các cạnh tương ứng vuông góc) $\Rightarrow XI.DK = RI.DP$.	0.5
	Mặt khác, theo cmt: $PG \parallel AQ \Rightarrow \frac{DP}{DA} = \frac{DG}{DQ} = \frac{NH}{NQ} = \frac{IH}{IR}$	1
	$\Rightarrow IH.DA = IR.DP = XI.DK \Rightarrow XI = \frac{IH.DA}{DK}$ không đổi, đường thẳng IX cố định, suy ra X cố định, đpcm.	0.5

Bài	Sơ lược lời giải	Điểm
	a. 	
	b. 	

Bài	Sơ lược lời giải	Điểm
3(5,0đ)	Giả sử tồn tại n thỏa mãn đề bài và M chia được thành k tập. Ta có các nhận xét sau: - Mỗi tập con chứa ít nhất 3 phần tử $\Rightarrow k \leq \frac{61-n}{3}$. - Trong mỗi tập con, nếu a là số lớn nhất thì tổng các phần tử của tập con đó bằng $2a$, nên tổng tất cả các phần tử của M là $S(n) = \frac{(n+60)(61-n)}{2}$ là số chẵn.	1
	Mặt khác, tổng tất cả các phần tử của tất cả các tập con: $S(n) \leq 2.(60 + 59 + \dots + (61 - k)) = 2. \frac{(60 + 61 - k).k}{2} = (121 - k).k.$ Do $k \leq \frac{61-n}{3} < \frac{121}{2}$ nên $S(n) \leq \left(121 - \frac{61-n}{3}\right) \frac{61-n}{3} = \frac{302+n}{9}.(61-n)$. Từ đây suy ra $\frac{n+60}{2} \leq \frac{302+n}{9} \Leftrightarrow n \leq \frac{64}{7} \Rightarrow n \leq 9$.	1.5
	Kiểm tra trực tiếp: $S(2), S(3), S(6), S(7)$ lẻ, không thỏa mãn.	0.5
	Xét $n = 9$: $k \leq \frac{61-9}{3} = \frac{52}{3} \Rightarrow k \leq 17$. Mặt khác $S(9) = 69.26 \leq (121 - k).k \Rightarrow k^2 - 121k + 69.26 \leq 0 \Rightarrow k \geq 18$, mâu thuẫn, loại. Tương tự: $n = 8$: $k \leq \frac{61-8}{3} = \frac{53}{3} \Rightarrow k \leq 17$, $S(8) = 34.53 \leq (121 - k).k \Rightarrow k \geq 18$, loại.	1
	Chỉ ra cách chia khi $n = 1, n = 4, n = 5$.	1

Hướng dẫn khi chấm:

- Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược bài giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất chi tiết nhưng không được quá số điểm dành cho câu, phần đó.
- Có thể chia điểm thành từng phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm toàn bài là tổng số điểm các phần đã chấm, không làm tròn điểm.
- Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi thống nhất trong cả tổ chấm và ghi vào biên bản.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NINH